Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Ano lectivo 1998/99 Folha 1

—◇—

1. Use o método da bissecção para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação $x + 0.5 + 2\cos \pi x = 0$ no intervalo $[0.5, 1.0]$.

2. Determine o número de iterações necessárias para aproximar, pelo método da bissecção e com uma precisão de 10^{-4}, a solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Determine tal aproximação com a precisão indicada.

3. Localize graficamente as raízes das equações seguintes e determine um valor aproximado de uma delas, com uma casa decimal correcta, utilizando o método da bissecção:

   (a) $\ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1} = 0$; (b) $|x| - e^x = 0$.

4. Pretende-se construir um tanque cúbico com capacidade de 25000 litros. Calcule uma aproximação para o lado do tanque usando o método da bissecção duas vezes e indique a precisão do resultado.

5. A componente forçada de uma tensão transitória de um dado circuito pode ser traduzida pela expressão:
$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t} \sin(2t - \pi).$$
   Usando o método da bissecção duas vezes determine a tensão máxima deste circuito.

6. Considere a função $f(x) = \ln(4 - x^2) - x$.

   (a) Faça a localização grafica das raízes reais de $f(x) = 0$.

   (b) Utilizando o método de Newton aproxime, verificando as condições de convergência, o valor da maior raiz real da equação real $f(x) = 0$, com um erro não superior a 10^{-2}.

7. Utilizando o método de Newton, aproxime a menor raiz positiva de $\cos x - xe^x = 0$ em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior a 1. Indique uma estimativa para o erro cometido.

8. Pretende-se calcular a área limitada superiormente pela recta que passa pelos pontos de coordenadas $(e, 1)$ e $(0, 2)$ e inferiormente pela curva $y = |\ln x|$.

   (a) Determine um intervalo de amplitude não superior a 1, que contenha a menor abcissa dos pontos de intersecção das referidas curvas.

   (b) Calcule um valor aproximado do limite inferior do intervalo de integração necessário para calcular aquela área.

9. Derive um processo iterativo para aproximar a raiz positiva de índice p de um número $c > 0$, aplicando o método de Newton à equação $x^p - c = 0$.

10. Aplicando o método de Newton, derive um processo iterativo para aproximar o inverso de um número $c \neq 0$.

11. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4} o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

12. Determine a distância mínima, na vertical, entre as curvas definidas por $y = e^x$ e $y = \ln(x)$.

13. Num escoamento com superfície livre pode definir-se uma camada junto ao fundo (designada por camada limite) onde as características do escoamento são significativamente diferentes das que se verificam acima dessa camada. Pode provar-se que a espessura da camada limite é $\delta = 5z$, sendo z, para um escoamento com determinadas características, dado por

$$|z| \log_{10} |75z| = 2.$$

   (a) Localize graficamente as raízes reais desta equação.

   (b) Determine a segunda aproximação dada pelo método de Newton para a espessura da camada limite, δ.

   (c) Indique um limite superior para o erro cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

14. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0, 1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão

$$h(t) = (t-1)e^t - t + 3.$$

   (a) Aplicando o método de Newton duas vezes, calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, no intervalo de tempo dado.

   (b) Determine a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

15. Mostre que $x = \frac{1}{2}\cos x$ tem uma solução α. Obtenha em seguida um intervalo $[a, b]$ que contenha a referida raiz e tal que para todo o x_0 nesse intervalo a sucessão $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

16. Aproxime todos os zeros de $f(x) = x^2 + 10\cos x$, com um erro inferior a 10^{-4}, usando o método iterativo do ponto fixo.

17. Determine uma aproximação para a maior raiz de $e^x - 4x^2 = 0$, usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

18. Pretende-se aproximar as raízes da equação $x^4 - 3x^2 + 2x = 0$, utilizando como função de iteração $g(x) = \dfrac{3x^2 - x^4}{2}$.

   (a) Mostre que não existe nenhum intervalo para o qual possa ser garantida a convergência para a raiz $x = 1$.

   (b) Usando o Método de Newton poderá garantir a sua convergência, com a aproximação inicial em $[0.85, 1.5]$? Justifique.

19. Mostre que o método iterativo

$$x_{r+1} = \frac{c}{x_r^{p-1}}$$

não é "útil" para aproximar a raiz de índice p ($p \in I\!N,\ p \geq 2$) de um número positivo c.

20. Um objecto de massa $m = 1Kg$ é largado de uma altura $s_0 = 30m$, podendo o espaço percorrido após t segundos ser traduzido por

$$s(t) = s_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

onde $k = 0.5Kg/seg$ representa a resistência do ar e $g = 9.8m/seg^2$. Use o método do ponto fixo para aproximar o tempo necessário para que o objecto atinja o solo.