Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Ano lectivo 1998/99 | Folha 2

—◇—

1. O sistema $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 &= 0 \\ x(6-x) + y - 9 &= 0 \end{cases}$ tem duas soluções, uma das quais é $[x\ y]^t = [3\ 0]^t$. Determine a outra solução do sistema usando o método de Newton em duas aproximações.

2. Considere o sistema não linear $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ e^x + y &= 1 \end{cases}$. Utilize o método de Newton para determinar a sua solução (x, y) com abcissa positiva em duas iterações.

3. Pretende-se construir uma ponte entre as duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$, determine o comprimento da ponte.

4. Considere a equação $x^2 + cx - 2 = 0$, com $c > 0$.

   (a) Determine, aplicando o método de Fourier, entre que valores pode variar c para que a equação tenha uma única raiz no intervalo $[1, 2]$.

   (b) Aproxime essa raiz pelo método de Newton.

5. Determine k de modo que a equação $z^4 + 2z^2 + kz + 3 = 0$:

   - não admita raízes positivas;
   - e admita uma raiz negativa em $[-1, 0]$;
   - e admita uma raiz em $[-2, -1]$.

6. A equação polinomial $x^5 - \frac{5}{2}x^4 - x^3 + 7x^2 - 6x + \frac{3}{2} = 0$ tem quatro raízes positivas e o seu limite excedente é $L = 2$.

   (a) Determine os sinais da sucessão de Fourier para $x = 1$ e conclua daí o grau de multiplicidade desta raiz.

   (b) Usando essa raiz, baixe de grau a equação dada e separe as raízes positivas da equação resultante.

7. Faça a contagem e a separação das raízes dos polinómios:

   (a) $P_a(x) = ax^2 - 10x + 100$, com $a \in \{0.2, 0.25, 0.3\}$;

   (b) $Q_a(x) = ax^3 - 9.72x^2 + 86x + 140$, com $a \in \{0.2, 0.3\}$.

8. Considere as equações:

   $$20x^3 - 64x^2 + 29x + 33 = 0; \qquad 27x^3 - 72x^2 + 60x - 16 = 0;$$

   $$2x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x - 1 = 0; \qquad x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

   (a) O que pode dizer sobre o número de raízes positivas e negativas de cada polinómio?

   (b) Localize, se possível, as raízes reais destas equações.

9. Considere a equação polinomial $x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0$, com $k \geq 0$.
   (a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.
   (b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e faça a separação completa das raízes da equação dada.
   (c) Aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

10. Localize as raízes das equações:
    (a) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$;
    (b) $2x^3 - 64x^2 + 29x + 35 = 0$.

11. Considere o polinómio $P(x) = -x^3 + 4x - k$, com $k \in \mathbb{R}$. Discuta o número e a localização das raízes reais de $P(x)$ em função dos valores que o parâmetro k pode tomar.

12. Faça a separação, em intervalos de amplitude não superior a uma unidade, das raízes reais dos seguintes polinómios:
    (a) $P(x) = x^3 - 9x - 12$;
    (b) $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$;
    (c) $R(x) = x^4 - 4x^2 - 5$.

13. Seja x^* a solução de $x^6 = x^4 + x^3 + 1$ mais próxima de 1.
    (a) Determine um intervalo de amplitude não superior a um que contenha x^*, justificando o procedimento.
    (b) Aproxime x^* pelo método de Newton efectuando duas iterações.

14. Localize e determine aproximações para as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de:
    $$P(x) = 1 - x^3 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^2 + 2.$$

15. Localize e separe os valores próprios reais da matriz $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, sabendo que a sua equação característica é $\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.2 = 0$.

16. Pretende-se construir um depósito semi-esférico, de raio r, para armazenar um líquido até uma altura h. Sabendo que o volume do referido líquido é dado pela expressão
    $$V = \frac{\pi(2r^3 - 3r^2h + h^3)}{3},$$
    qual o raio com que deve construir o depósito se pretender guardar no máximo 250 litros de líquido a uma altura de 2 metros?

17. Aplicando o método de Bairstow procure determinar os zeros dos seguintes polinómios:
    (a) $P(x) = x^3 - x - 1$;
    (b) $P(x) = x^3 + x - 3$;
    (c) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

18. Dado o polinómio $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 9$ decomponha-o em dois factores quadráticos usando o método de Bairstow e tomando $s = 3$ e $t = -5$ para valores iniciais.