Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Ano lectivo 1998/99 Folha 3

—◇—

1. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do seguinte sistema começando com uma aproximação inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^t$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Considere o sistema de equações lineares $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 20x & + & 2y & + & 6z & = & 38 \\ x & + & 20y & + & 9z & = & -23 \\ 2x & - & 7y & - & 20z & = & -57 \end{array} \right.$.

   (a) Decomponha a matriz do sistema tendo em vista a utilização do método de Gauss-Seidel para a resolução aproximada do sistema.

   (b) Verifique se aquele método é convergente.

   (c) Calcule, aplicando o método de Gauss-Seidel, uma aproximação da solução do sistema com erro inferior a 0.02.

3. Dado o sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & z & = & 16 \\ x & + & y & - & 4z & = & 7 \end{array} \right.$ e, partindo do vector inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^t$, obtenha duas aproximações para a sua solução, usando:

   (a) O método iterativo de Jacobi;

   (b) O método iterativo de Gauss-Seidel.

   Compare as aproximações obtidas com a solução do sistema.

4. Considere o sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array} \right.$.

   (a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.

   (b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel ao sistema? Justifique resposta.

   (c) Determine valores de k para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.

   (d) Calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi, com $k = 0$.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o raio espectral de A.

   (b) Pretende-se resolver o sistema $Ax = b$ pelo método de Jacobi. Que conclusões pode tirar, do resultado de (a), acerca da convergência do método?

   (c) Suponha que ao resolver um sistema do tipo $Cx = f$, pelo método de Gauss-Seidel, resulta, para matriz de iteração, a matriz A. Que pode afirmar sobre a convergência deste método?

6. Ao resolver o sistema linear $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, isto é, toma o valor $b + \delta b$. Qual o erro que obtém para a solução x em virtude dessa inexactidão?

7. Considere o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2y + az = 0 \\ -x + 2z = 3 \end{cases}$, com $a < 0$.

   (a) Determine todos os valores do parâmetro a que garantam a convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado à resolução deste sistema.

   (b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

8. Considere o sistema
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é
$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda.$$

   (b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

   (c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

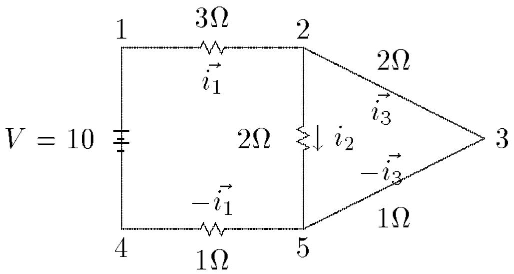
   (d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

9. São precisos três materiais para a produção de três tipos de automóveis, sendo na tabela que segue indicadas as quantidades necessárias, em kilogramas por carro, de cada um desses materiais:

Carro	Plástico	Borracha	Metal
1	40	100	1500
2	33	120	1700
3	42	100	2000

   Considerando que em cada dia há, respectivamente, 2.32, 6.4 e 109 toneladas de plástico, borracha e metal disponíveis, quantos automóveis podem ser produzidos?

10. Considere o seguinte circuito eléctrico



   Por aplicação da lei de Kirchhoff, as intensidades em cada um dos ramos do circuito podem ser determinadas resolvendo o sistema linear
$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 = 5 \\ 2i_2 - 3i_3 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}.$$

   Obtenha uma solução aproximada deste sistema utilizando o método de Gauss-Seidel duas vezes.