Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Ano lectivo 1998/99 Folha 4

—◇—

1. Determine o polinómio de Lagrange $P(x)$ que passa pelos pontos $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(1, -1)$ e $(3, 10)$. Calcule depois $P(0)$.

2. Prove que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$ em que $l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

3. Considere $P(x)$ um polinómio de grau n e $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, onde x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são $n + 1$ pontos distintos. Prove que o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é dado por $a_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(x_i)}{w'(x_i)}$.

4. Determine aproximações de $\sin \frac{\pi}{8}$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0, \pi]$. Compare os resultados obtidos e indique majorantes do erro.

5. Considere a função $f(x) = \cos x$ para x em $[0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

6. A seguinte tabela lista a população, em milhares de pessoas, de 1930 a 1980 num certo país.

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
População	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

   Utilize o polinómio de Lagrange para estimar a população no ano 1965.

7. Seja $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

   . Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

   (a) o polinómio de Newton das diferenças divididas;

   (b) o polinómio de Newton das diferenças progressivas.

8. Considere a tabela

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$P(x_i)$	3	3.008	3.164	3.216	3.512	4

   , referente a um polinómio de grau 3. Sabendo que o valor de $P(0.4)$ vem afectado de um determinado erro:

   (a) determine esse erro;

   (b) corrija a tabela apresentada.

9. Determine uma aproximação de $\sin \frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$. Indique um estimativa para o erro cometido e compare o resultado com os obtidos no exercício 4.

10. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

11. Os alunos do Polo II resolveram participar num estudo a realizar sobre o *Rallie de Portugal*. Para isso, é necessário cortar "jantes" de automóveis com 20 cm de raio em seis peças iguais (como se mostra na figura ao lado). Cada peça é cortada em três partes, perpendicularmente à base, ficando a base igualmente repartida. Determine uma aproximação da altura de cada pedaço.

12. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

13. De uma função $f(x)$ conhece-se a tabela

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

. Determine x^* tal que $f(x^*) = 0$.

14. Mostre que o polinómio $P_3(x)$ que toma os valores $P_3(0) = f_0$, $P_3(1) = f_1$, $P_3'(0) = f_0'$ e $P_3'(1) = f_1'$, é dado por

$$P_3(x) = (1-x)^2(1+2x)f_0 + x(1-x)^2 f_0' + x^2(3-2x)f_1 + x^2(x-1)f_1'.$$

15. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule, posteriormente, uma aproximação para $\cos\frac{\pi}{4}$ e para $\sin\frac{\pi}{8}$.

16. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 5 para a função $f(x) = \cos x + \sin x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

17. Considere a seguinte tabela referente a uma certa função $f(x)$:

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	1	2.5	25	104.5	289	638.5

   (a) Construa o polinómio interpolador de maior grau de $f(x)$ no intervalo $[0, 5]$.

   (b) Sabendo que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3$, construa o polinómio interpolador de Hermite de grau 3 usando os dados da tabela que necessite.

   (c) Recorrendo aos três primeiros valores da tabela, obtenha o valor de x^* tal que $f(x^*) = 10$.

18. Construa o polinómio interpolador de uma função $f(x)$ para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$.

19. O Sr. X estava a entrar em casa quando viu passar Fernanda Ribeiro no seu treino matinal. Pelos seus cálculos, a sua velocidade devia ser aproximadamente 2.4Km/h. Passados 5 minutos, o Sr. X telefona ao seu amigo Sr. Y, que mora no fim dessa rua a 150 metros da sua casa, para lhe contar o sucedido. No entanto, o Sr. Y responde que Fernanda Ribeiro está, nesse momento, a passar em frente da sua casa a uma velocidade de 6Km/h.

   (a) Onde se encontrava Fernanda Ribeiro ao fim de 2.5 minutos?

   (b) Aproxime o instante em que Fernanda Ribeiro estava à mesma distância das duas casas.

   (c) Sabendo que a sua velocidade normal é de 3Km/h, determine uma aproximação do instante a partir do qual a sua velocidade era superior à normal.