Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

6 de Janeiro de 1999 Duração: 2h30m

—◇—

1. Considere as seguintes equações equivalentes:

$$\text{(A)}\quad x \ln x - 1 = 0 \qquad\qquad \text{(B)}\quad \ln x - \frac{1}{x} = 0\,.$$

   (a) Mostre que há exactamente uma raiz positiva e obtenha um intervalo que a contenha.

   (b) Para as equações (A) e (B) determine o maior intervalo no qual o método de Newton-Raphson converge.

2. A equação $x^2 - 2 = 0$ pode reescrever-se nas seguintes formas:

$$\text{(a)}\quad x = x^2 + x - 2 \qquad\qquad \text{(b)}\quad x = \frac{2}{x} \qquad\qquad \text{(c)}\quad x = \frac{x+2}{x+1}\,.$$

   Indique qual o comportamento do método do ponto fixo em cada um destes casos, para aproximar a raiz positiva daquela equação.

3. Considere o seguinte polinómio $P(\lambda) = -\lambda^3 + 1.08\lambda - 0.432$. Supondo que $P(\lambda)$ é o polinómio característico da matriz de iteração M, de um dos métodos iterativos estudados (Jacobi ou Gauss-Seidel), quando aplicado a um sistema linear $Ax = b$, responda às questões:

   (a) Indique, justificando, qual o método em causa.

   (b) Averigue se o método em causa é convergente.

   (c) Sabendo que $M = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & c & b \\ b & b & d \end{bmatrix}$ determine os valores de a, b, c e d.

   (d) Supondo que os elementos diagonais da matriz A do sistema são todos iguais a 5, determine os restantes elementos de A.

4. Considere a seguinte tabela de valores:

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-33	14	-2	-5

   (a) Determine um valor aproximado de $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$, usando a regra dos trapézios e indique uma estimativa do erro cometido nessa aproximação.

   (b) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma $f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e que $f[-1,1,2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador nos últimos três pontos da tabela, uma expressão que permita obter $f(x)$.

v.p.f.

5. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' = y - x^2 .$$

(a) Mostre que a única solução da equação considerada que satisfaz à condição inicial $y(0) = 2$ é a função

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 .$$

(b) Partindo da condição inicial $y(0) = 2$, determine um valor aproximado de $y(0.3)$, utilizando o método de Euler: $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$, com passo $h = 0.1$.

FORMULÁRIO

Método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) .$$

Interpoladora de Newton das diferenças Δ

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) .$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - E - F$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b , \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$$A = D - E - F$$

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b , \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] , \qquad E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a)f''(\xi) , \quad \xi \in (a, b) .$$
