Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 1

—◇—

1. Os valores $\overline{x} = 0.333$, $\overline{y} = 1.415$ e $\overline{z} = 1.5708$ são aproximações, respectivamente, a $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \sqrt{2}$ e $z = \dfrac{\pi}{2}$. Indique o número de algarismos significativos correctos e o número de casas decimais correctas de cada uma daquelas aproximações.

2. Considere a função $f(x) = e^x$.
   (a) Mostre que, quando se consideram os n primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor, o erro de truncatura é inferior a $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$, para $x > 0$.
   (b) Calcule o valor de e^2 com 4 casas decimais correctas.
   (c) Dê uma estimativa para o erro que se comete se fizermos $e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$.

3. (a) Determine o menor número de termos que deve considerar no desenvolvimento em série de Taylor da função $\ln(1+x)$, para aproximar o valor de $\ln 2$ com erro inferior a 0.01.
   (b) Calcule um valor aproximado para $\ln \dfrac{2}{3}$ com um erro inferior a 10^{-2}.

4. Estabeleça a fórmula $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$, $a > 0$, determine o valor de $\sqrt{27}$, fazendo $a = 5$ e avalie o erro cometido.

5. Pretende-se calcular uma aproximação do valor real $A = \dfrac{8}{\pi} \sin \dfrac{\pi}{8}$ com três casas decimais correctas desenvolvendo $\dfrac{\sin x}{x}$ em série de Taylor.
   (a) Determine o menor número de termos a tomar naquele desenvolvimento de modo a obter a precisão referida.
   (b) Calcule A de acordo com a alínea anterior e apresente o erro absoluto cometido.

6. Sabendo que $\ln \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt$, para $|x| < 1$, determine o valor de $\ln 2$, com um erro inferior a 0.2, recorrendo à fórmula de Maclaurin aplicada a $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

7. Indique um majorante do erro que se comete quando se pretende aproximar o valor de $\pi/4$, considerando 3 termos da série $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ e $x = 1$.

8. Seja $z = \dfrac{ab}{c}$. Sabendo que $\overline{z}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ são valores aproximados de z, a, b e c, respectivamente, determine uma relação entre o erro relativo de $\overline{z}$ e os erros relativos de $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$. Justifique convenientemente a resposta.

9. A reactância de um condensador é dada pela expressão $X_c = \dfrac{1}{2\pi f c}$ onde X_c =reactância capacitiva (Ω), f =frequência (Hz) e c =capacidade. Determine o erro absoluto máximo para X_c se $f = 100 \pm 1Hz$, $c = 10^{-7}$ um valor obtido com uma precisão de 10% e $\pi \approx 3.14$.

10. A norma euclideana de um vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Mostre que o erro relativo de $||x||$ é menor ou igual à soma dos erros relativos das coordenadas de x.

11. Considere a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Relacione o erro relativo de f com o erro relativo de x.

12. Seja $z = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}$, e considerem-se conhecidos valores aproximados para x_i e y_i, $i = 1, \ldots, n$. Mostre que $|\mathrm{Rel}\,\overline{z}| \leq \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Rel}\,\overline{x}_i| + |\mathrm{Rel}\,\overline{y}_i|)$.

13. Um determinado problema tem como objectivo obter os coeficientes de um polinómio de grau $n > 0$
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x > 1.$$
Suponha que não calcula os valores exactos dos coeficientes deste polinómio. obtendo apenas aproximações $\overline{a}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, com k casas decimais correctas. Seja $\overline{p}_n(x) \approx p_n(x)$ dado por $\overline{p}_n(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \cdots + \overline{a}_n x^n$. Prove que para $\overline{p}_n(x)$ não pode garantir k casas decimais correctas.

14. O espaço percorrido por um corpo em movimento uniformemente acelerado é dado por $s = \dfrac{1}{2} g t^2$, em que g é dada exactamente pelo valor $9.8ms^{-2}$ e o tempo t é medido em segundos com um erro de $0.1s$. Mostre que à medida que t aumenta, o erro absoluto na medição do espaço s aumenta, enquanto que o erro relativo diminui.

15. A área de um círculo é $A = \pi r^2$. Sabendo que o valor aproximado de r é $30cm$, indique com que precisão deve ser medido o raio e quantas casas decimais correctas devem ser utilizadas em π para obter uma aproximação do valor de A com 4 casas decimais correctas.

16. Considere a seguinte matriz
$$B = \begin{bmatrix} 5.7 & 3.4 & 2.1 \\ 6.1 & 3.2 & 6.1 \\ 7.2 & 4.2 & 8.3 \end{bmatrix}.$$
Dos elementos b_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, apenas os elementos da diagonal secundária estão afectados dum certo erro. Determine um limite superior para o o erro cometido em cada um deles, sabendo que o seu produto P está afectado dum erro cujo limite superior é 3×10^{-3}.

17. Dada uma matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos se encontram afectados de um mesmo erro ε, obtenha um limite superior para o erro absoluto de $\det(A)$.

18. Pretende-se determinar o valor de $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ com três casas decimais correctas. Que valores aproximados de π e de $\sqrt{2}$ devem ser utilizados para garantir essa precisão?