Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 2

——◇——

1. Considere os sistemas $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -7 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}\right.$ e $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 27 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}\right.$
   e resolva-os aplicando cada um dos métodos seguintes:
   (a) Método de eliminação de Gauss.
   (b) Método de Gauss-Jordan.
   (c) Factorização LU.

2. Seja A uma matriz complexa, não singular e de ordem n. Mostre que se λ é um valor póprio de A, então $\frac{1}{||A^{-1}||} \leq |\lambda| \leq ||A||$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule $||A||_1$ e $||A||_\infty$.
   (b) A matriz A será estritamente diagonal dominante? Justifique a resposta.

4. Ao resolver o sistema linear $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, isto é, toma o valor $b + \delta b$. Qual o erro que obtém para a solução x em virtude dessa inexactidão.

5. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6. Dado o sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & z & = & 16 \\ x & + & y & - & 4z & = & 7 \end{array}\right.$, obtenha uma primeira aproximação para a sua solução, usando:
   (a) O método iterativo de Jacobi;
   (b) O método iterativo de Gauss-Seidel.

7. Considere o sistema $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2.7 & 0 \\ 10 & 10 & -3 \\ 4 & -2.4 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.
   (a) Diga, justificando, que valores pode tomar o parâmetro α de modo a poder aplicar o método iterativo de Jacobi na aproximação da resolução do sistema dado.
   (b) Faça $\alpha = 10$. Da análise directa da matriz A que pode concluir a respeito da convergência da sucessão de aproximações geradas pelo método?
   (c) Mostre que a sucessão referida na alínea anterior é convergente para a solução do sistema e determine um valor aproximado desta, aplicando duas vezes o método iterativo de Jacobi.

8. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & Kx_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & Kx_3 & = & 3 \\ Kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$, $K \in \mathbb{R}$.

   (a) Obtenha, justificando, um intervalo de valores de K para o qual o método iterativo de Gauss-Seidel permite gerar uma sucessão de vectores convergente para a solução do sistema.

   (b) Faça $K = 0$ e aplique o referido método duas vezes partindo de $x^{(0)} = [-0.5 \;\; 0.5 \;\; 0.5]^T$.

9. Pretende-se resolver $\begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ por um dos métodos iterativos estudados.

   (a) Justificando, determine o menor valor inteiro positivo de a, por forma a poder garantir que a sucessão de aproximações geradas pelos referidos métodos convirja para a solução.

   (b) A partir de $[x_1 \;\; x_2]^T = [5/4 \;\; -1/4]^T$, execute o número de iterações necessárias para obter uma aproximação da solução com uma casa decimal correcta ao utilizar o método de Jacobi.

10. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$.

   (a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.

   (b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método iterativo de Gauss-Seidel ao sistema? Justifique.

   (c) Calcule duas aproximações para a solução do sistema, usando o método de Jacobi e $k = 0$.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o raio espectral de A.

   (b) Pretende-se resolver o sistema $Ax = b$ pelo método de Jacobi. Que conclusões pode tirar, do resultado de (a), acerca da convergência do método?

   (c) Suponha que ao resolver um sistema do tipo $Cx = f$, pelo método de Gauss-Seidel, resulta, para matriz de iteração, a matriz A. Que pode afirmar sobre a convergência deste método?

12. Pretende-se resolver o sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$ pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

   (a) Para que valores de a é este método convergente? Justifique.

   (b) Considerando $a = 1/2$ e $b = [1 \;\; 3]^T$, determine a solução aproximada do sistema usando este método. Indique o erro cometido ao fim de duas iterações.

13. O método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$ diverge. Reordene as equações de modo a obter um sistema que lhe permita garantir que este método converge.

    Use duas vezes o método da relaxação (com um parâmetro $w = 0.25$) para aproximar a solução do sistema reordenado.