Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 3

—◇—

1. Considere os pontos $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$, e com eles construa o polinómio interpolador de Lagrange, $P_3(x)$. Calcule também $P_3(0)$.

2. Considere a função $f(x) = \sin x$, definida em $[0, \pi/2]$.

   (a) Determine o menor número de pontos que deve considerar no intervalo dado para que o erro da aproximação de f por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.1.

   (b) Sabendo que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ utilizando um polinómio interpolador de ordem 2.

3. Dada a seguinte tabela

x_i	1	-1	2
$g(x_i)$	0	-3	-4

   relativa a uma função g, construa o polinómio interpolador de Newton das diferenças divididas.

4. Seja P_2 o polinómio interpolador de grau2, interpolador de f nos pontos x_0, x_1 e x_2. Considerando $M_3 = \max_{x\in[x_0,x_2]} |f''(x)|$, mostre que

$$|f(\bar{x}) - P_2(\bar{x})| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3, \quad \forall\ \bar{x} \in [x_0, x_2].$$

5. Suponha que é dada a seguinte tabela relativa à função $y = \sqrt{x}$

x_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
y_i	1.0000	1.0050	1.0100	1.0149	1.0198	1.0247

   (a) Construa a tabela das diferenças divididas e comente o resultado.

   (b) Considerando interpolação linear, determine uma aproximação para $\sqrt{1.005}$.

6. Mostre que:

   (a) $\Delta \text{arctg} x = \text{arctg} \dfrac{h}{1 + xh + x^2}$; (b) $\Delta \log f(x) = \log \left(1 + \dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right)$;

7. Seja f uma função tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$, quaisquer que sejam os números reais x e y. Mostre que $\Delta^n f(x) = (f(h) - 1)^n f(x)$, para $n = 1, 2, \ldots$.

8. Considere uma função f conhecida nos seguintes pontos:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	-6	-12

   (a) Usando a definição determine o polinómio interpolador de f nos pontos dados.

   (b) Cosidere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

i. Sem efectuar cálculos, indique a solução do sistema $Ax = b$, onde $b = [0 \quad -6 \quad -12]^T$. Justifique convenientemente a resposta. (**Sugestão:** Tenha em conta a alínea anterior.)

ii. Pretende-se resolver o sistema $Ax = b$ pelo método de Jacobi. Que pode dizer acerca da convergência deste método?

iii. Calcule duas aproximações para a solução do sistema usando o método de Jacobi.

9. Considere a tabela

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	-11	2	5	4	$b+1$	$3b+2$	a

referente a um polinómio de grau 3.

(a) Determine a e b.

(b) Ampliando a tabela determine o valor do polinómio em -4.

(c) Determine o polinómio $P(x)$.

10. Considere a seguinte tabela

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	5	2	11	38	89

relativa a uma dada função f.

(a) Mostre que os valores da tabela satisfazem uma equação cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(b) Determine a, b, c e d.

11. Dados os pontos apresentados na tabela

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	a	2	4	b

determine a e b por forma a que o polinómio interpolador, que se pode construir com estes pontos, seja de grau 3, com o coeficiente do termo de maior grau igual à unidade e admita 2 como raiz. Diga qual é esse polinómio.

12. Construa a função *spline* linear para $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, usando 4 intervalos com a mesma amplitude.

13. Considere a função definida por $f(x) = e^{-x^2/2}$, para $x \in [0, 1]$.

(a) Determine a função *spline* cúbica completa interpoladora de f nos pontos 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 e 1.00.

(b) Calcule $\max_{0 \leq i \leq 100} \{|f(x_i) - s(x_i)|\}$, $x_i = i/100$, $i = 0, 1 \ldots, 100$. Compare a estimativa com o resultado teórico obtido.

(c) Calcule a derivada de s e verifique que é um polinómio segmentado do segundo grau, contínuo em [0,1]. Calcule uma estimativa para o limite superior do erro cometido ao interpolar f' por s'.

14. Represente o *spline* cúbico natural e completo para a função $f(x) = \sin x$ em $[0, \pi]$, usando os pontos interiores $\pi/3$ e $2\pi/3$.

15. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule, posteriormente, uma aproximação para $\cos \frac{\pi}{4}$ e para $\sin \frac{\pi}{8}$.

16. Construa o polinómio interpolador de uma função $f(x)$ para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$.