Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 4

—⋄—

1. Localize graficamente as raízes reais das equações dadas:

   (a) $\dfrac{\sin x}{x} - x = 0$;

   (b) $\ln x \, \operatorname{cotg}(-x) = 1$;

   (c) $e^{-x} - \ln x = 0$.

2. Calcule uma aproximação para $\sqrt[3]{25}$ usando o método da bissecção duas vezes e indique a precisão do resultado obtido.

3. Considere o método da bissecção. Seja L a amplitude do intervalo $[a_0, b_0]$ que contém uma e uma só raiz de $f(x) = 0$ e $\{x_1, x_2, \ldots\}$ a sucessão de pontos médios gerados pelo referido método. Mostre que:

   (a) $|x_{i+1} - x_i| = \dfrac{L}{2^{i+1}}$;

   (b) O número N de iterações necessárias para garantir uma aproximação da raiz com uma precisão δ é dado por $N > \dfrac{\ln L - \ln \delta}{\ln 2}$.

4. Localize graficamente as raízes reais das equações seguintes e determine um valor aproximado de uma delas, utilizando o método da bissecção com um erro que não exceda 0.15:

   (a) $(x-1)\ln(x-1) = 1$;   (b) $|x| - e^x = 0$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5k/8 & 0 \\ 1-k & 1 & 1/5 \\ 1 & 0 & 5-5k \end{bmatrix}$, onde $k \in \mathbb{R}$, e o vector $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   Usando o método da bissecção duas vezes indique os valores de k para os quais o sistema linear $Ax = b$ tem uma solução única.

6. (a) Para aproximarmos uma raiz de $f(x) = 0$ pelo método do ponto fixo reescrevemos a equação na forma $x = x + cf(x) = g(x)$, com $c \neq 0$ constante. Se $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$, como deve escolher c por forma a que a sucessão $\{x_n\}$ de $x_n = g(x_{n-1})$ seja convergente para α? Justifique convenientemente a resposta.

   (b) Para o caso particular de $f(x) = x^2 - 3$ obtenha um valor de c que assegure a convergência referida em (a).

7. Determine, justificando, um valor aproximado de π usando o método do ponto fixo.

8. Mostre que $x = \dfrac{1}{2}\cos x$ tem uma solução α. Obtenha em seguida um intervalo $[a, b]$ que contenha a referida raiz e tal que para todo o x_0 nesse intervalo a sucessão $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

9. Mostre que o método iterativo $x_{r+1} = \dfrac{c}{x_r^{p-1}}$ não é "útil" para encontrar a raiz de índice p ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) de um número positivo c.

10. A equação $x^4 - 4x^3 + x - 1 = 0$ pode ser reformulada de várias maneiras para se adaptar ao método do ponto fixo e aproximar a maior raiz positiva. Das reformulações abaixo indicadas diga se escolheria alguma e porquê. Em caso afirmativo, calcule o valor aproximado dessa raiz com 2 casas decimais correctas.

    (a) $x = (1 + 4x^3 - x)^{1/4}$ (b) $x = -x^4 + 4x^3 + 1$ (c) $x = 4 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

11. Determine uma aproximação para a maior raiz real de $e^x - 4x^2 = 0$ usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

12. Pretende-se determinar as raízes da equação $x^4 - 3x^2 + 2x = 0$, utilizando como função de iteração $g(x) = \dfrac{3x^2 - x^4}{2}$.

    (a) Mostre que não existe nenhum intervalo para o qual possa ser garantida a convergência para a raiz $x = 1$.
    (b) Usando o Método de Newton-Raphson poderá garantir a sua convergência, com a aproximação inicial em $[0.85, 1.5]$? Justifique.

13. Considere um parâmetro real $k > 0$ e a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq k \\ \ln x, & x > k \end{cases}$.

    Determine o valor de k para o qual f é uma função contínua, utilizando o método de Newton-Raphson em segunda aproximação.

14. Considere a equação transcendente, $x^2 + 4 \mid \ln |x| \mid - 4 = 0$, para $x \neq 0$ e real.

    (a) Localize graficamente as suas raízes.
    (b) Determine um valor aproximado para a maior delas usando o método de Newton em 2ª aproximação.

15. Pretende-se calcular a área limitada superiormente pela recta que passa pelos pontos de coordenadas $(e, 1)$ e $(0, 2)$ e inferiormente pela curva $y = |\ln x|$.

    (a) Determine um intervalo de amplitude não superior a 1 que contenha a menor abcissa dos pontos de intersecção das referidas curvas.
    (b) Calcule um valor aproximado do limite inferior do intervalo de integração necessário para calcular aquela área.

16. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

17. Determine o mínimo da função $f(x) = (x - 1)e^x - x + 3$, aplicando o método de Newton duas vezes.

18. Localize graficamente todas as raízes das equações seguintes e aproxime a menor positiva usando os métodos da secante e de Newton:

    (a) $2 \cos x - \cosh x = 0$;
    (b) $x^2 - 1 - \ln(x + 1) = 0$;
    (c) $|x| - \cos x = 0$;
    (d) $x \ln x - e^x + 4 = 0$.

    Compare os resultados obtidos.