Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 5

——◇——

1. Determine a coroa circular que contém todos os zeros dos seguintes polinómios:
   (a) $P(x) = x^4 + 4x^2 - 3x - 3$;
   (b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

2. Faça a contagem, sepração e, se possível, calcule os zeros reais dos seguintes polinómios:
   (a) $P(x) = 2x^3 - 64x^2 + 29x + 35$;
   (b) $Q(x) = 4x^3 - 11.2x^2 + 6.6x + 1.8$;
   (c) $R(x) = x^4 - x^2 - 2$;
   (d) $S(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$.

3. Sabendo que c é raiz da equação $ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0$, onde a, b, c são valores reais, determine as restantes raízes.

4. (a) Determine o polinómio de Maclaurin de ordem 4, $P(x)$, para a função $f(x) = \ln(x + 1)$.
   (b) Determine uma região que contenha todos os zeros de $P(x)$.
   (c) Faça a contagem dos zeros reais de $P(x)$, usando a regra de sinais de Descartes.
   (d) Localize e separe todos os zeros reais de $P(x)$.

5. Considere a seguinte equação polinomial $f(x) = 5x^2 - 4x - 4x^3 + x^4 + 4 = 0$.
   (a) Construa a coroa circular que contém todas as suas raízes e, a partir dela, determine intervalos que contenham as possíves raízes reais.
   (b) Aplicando a regra de sinais de Descartes, a que conclusões pode chegar para o número de raízes reais daquela equação? Justifique a resposta.
   (c) Localize as raízes reais e determine-as.

6. Considere o seguinte polinomio $x^3 - 0.6x^2 + 0.09x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Diga para que valores do parâmetro real λ a equação $P(x) = 0$ não tem raízes positivas.
   (b) Faça $\lambda = -0.1$ e separe as raízes reais de $P(x) = 0$.
   (c) Aproxime a maior das raízes de $P(x)$ usando o método da secante com erro inferior a 0.1.

7. Considere a seguinte matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$
   (a) Prove que a equação característica de A é $\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.2 = 0$.
   (b) Localize as raízes reais da equação característica de A.

(c) Considere $\lambda \in [0, 0.4]$. Aplique o método de Fourier e diga que conclusões pode obter.

(d) Supondo que A é a matriz de iteração de um determinado método iterativo que aproxima a solução de um sistema de equações lineares $Bx = d$, que pode concluir acerca da convergência deste método? Justifique a resposta.

(e) Pretende-se usar o método de Jacobi para aproximar a solução do sistema de equações lineares $Ax = b$, com $b = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Averigue se o método converge e, em caso afirmativo, determine uma aproximação da solução do sistema com erro inferior a 0.5. O resultado obtido sugere-lhe algum comentário?

8. Usando o método de Rolle, faça a separação, em intervalos de amplitude não superior a uma unidade, de todas as raízes dos seguintes polinómios:

   (a) $P(x) = x^3 - 27x - 9$;

   (b) $Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 12x + 1$;

   (c) $R(x) = x^4 - 4x^2 - 5$.

9. Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, tal que l e L são, respectivamente, os limites inferior e superior das raízes reais de $f(x) = 0$, determinados pelo método de Newton.

   (a) Prove que L é ainda limite superior das raízes reais de $f'(x) = 0$.

   (b) Considere a seguinte sucessão e respectivos sinais

$f(l)$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(L)$
$-$	$+$	0	$+$	$+$

   em que a, b e c são raízes reais de $f'(x) = 0$ e $a < b < c$. Que pode concluir quanto às raízes reais de $f(x) = 0$? Justifique convenientemente a resposta.

10. Considere o polinómio $P(x) = -x^3 + 4x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Discuta o número e a localização das raízes reais de $P(x) = 0$ em função dos valores que o parâmetro k pode tomar.

11. Localize as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos dos seguintes polinómios:

$$P(x) = 1 - x^3 \quad \text{e} \quad Q(x) = x^2 + 2.$$

    Determine aproximações para estas abcissas.

12. Seja x^* a solução de $x^6 = x^4 + x^3 + 1$ mais próxima de 1.

    (a) Indique um intervalo de amplitude não superior a 1 que contenha x^*. Justifique convenientemente.

    (b) Aproxime x^* pelo método de Newton com duas iterações.