Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 6

—⋄—

1. Determine valores aproximados do integral $I = \int_0^1 e^{-x}\,dx$, usando as regras dos trapézios e de Simpson simples. Indique um limite superior para o erro cometido em cada um dos casos.

2. Dada a função f, definida em $[0,1]$ por $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < 0.5 \\ 1-x\,, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$, determine $I = \int_0^1 f(x)dx$, usando a regra dos trapézios e a regra de Simpson.

3. Seja $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\,dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar em $[-2,-1]$, por forma a que o erro cometido no cálculo aproximado do integral dado não exceda 0.5×10^{-3}, quando se utiliza a regra dos trapézios?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

   (c) Repita as alíneas anteriores usando a regra de Simpson.

4. Determine o menor número de pontos que deve considerar em $[-2,2]$ para obter um valor aproximado de $I = \int_{-2}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, com uma casa decimal correcta, ao usar a regra dos trapézios.

5. Considere o integral $I = \int_0^1 e^x \cos x\,dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar em $[0,1]$ por forma a que o erro cometido no cálculo de um valor aproximado de I, pela regra de Simpson, não exceda 10^{-3}?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

6. Considere a seguinte tabela relativa a uma função f:

x_i	0	0.1	0.2	0.3
$f(x_i)$	2	2.5	0.8	-1

   (a) Obtenha uma aproximação para $I = \int_0^{0.3} f(x)\,dx$ usando a regra dos trapézios composta.

   (b) Calcule um limite superior do erro obtido ao determinar aquela aproximação.

7. Suponha que são dados os pontos, na tabela que se segue, referentes a uma função f:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.00	0.83	0.71	0.62	0.36	0.30

.

   (a) Será possível calcular um valor aproximado para $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, usando a regra de Simpson ou dos trapézios, através da tabela, com um erro que não exceda 10^{-3}? Justifique.

   (b) Calcule uma aproximação para o valor de I e uma estimativa para um majorante do erro.

8. Determine um valor aproximado para o comprimento do arco da curva $y = x^3 - x$, entre os pontos $(-1,0)$ e $(2,6)$, usando a regra dos trapézios composta, com quatro subintervalos.

9. Pretende-se calcular um valor aproximado para o integral $I = \displaystyle\int_1^2 \ln \frac{1}{x}\, dx$.

   (a) Use a regra de Simpson para obter I com 3 casas decimais correctas.

   (b) Sem determinar o valor exacto de I diga, justificando, se a aproximação foi obtida por defeito ou por excesso.

10. Considere a seguinte tabela, relativa a uma função f:

x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	-2	12	-6	10	11

   Recorrendo à regra dos trapézios, determine um valor aproximado para o integral $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\, dx$ e indique uma estimativa para o limite superior do erro cometido nessa aproximação.

11. Aplique a regra dos trapézios com cinco subintervalos de igual amplitude para calcular um valor aproximado do integral $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + \sin x)\, dx$ e determine um majorante para o erro cometido.

12. (a) Obtenha um valor aproximado para $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ usando as regras dos trapézios e de Simpson com $n = 4$.

   (b) Através da análise dos respectivos erros, compare os resultados obtidos.

   (c) Compare os resultados da alínea anterior com os que pode obter através da determinação de $\frac{\pi}{4}$ com a máquina de calcular.

13. Pretendemos calcular o valor aproximado de $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x}{e^{2x}}\, dx$ pela regra de Simpson com um erro de truncatura que não exceda 10^{-5}.

   (a) Diga qual o menor número de pontos igualmente espaçados em que tem de conhecer o valor da função integranda para obter essa aproximação?

   (b) Indique esses pontos bem como o valor aproximado do integral dado por aquela regra.

14. Considere a função definida por $f(x) = x \ln(x - 1)$.

   (a) Localize graficamente as raízes reais da equação $f(x) = 1$.

   (b) Aproxime a maior raiz real da equação anterior, usando o método da secante com uma casa decimal correcta.

   (c) Considere a região do plano definida por $x \geq 2$, $y \geq 0$, $y \leq \dfrac{1}{x}$ e $y \geq \ln(x-1)$. Aproxime a área desta região, usando a regra dos trapézios, com um erro inferior a 0.01.

15. Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \sin 2x$ e $g(x) = x^2$.

   (a) Aproxime a maior das abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e g, usando o método de Newton com erro inferior a 0.01.

   (b) Considere o sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região do plano limitada pelos gráficos de f e de g. Determine um valor aproximado do volume deste sólido, usando a regra de Simpson com erro inferior a 0.1.