Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha 7

—◇—

1. Mostre que os seguintes problemas de condição inicial têm solução única.

(a) $\begin{cases} y' &= 3xy\,, \quad 0 \le x \le 1\,. \\ y(0) &= 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' &= -y+t+1\,, \quad 0 \le t \le 1\,. \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' &= \cos 2y\,, \quad \text{em qualquer intervalo que contenha } x_0\,. \\ y(x_0) &= s \end{cases}$

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Determine, usando o método de Euler – $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ – o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta é $y(t) = e^{-2t}$.

3. Aplique o método de Euler ao problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= x^2 + y^2\,, \quad x > 0\,. \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Obtenha um valor aproximado de $y(0.2)$ usando o valor de $h = 0.1$.

4. Use o método de Euler no problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= x^2 + x - y\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

com $h = 0.2$ para obter uma estimativa do valor de $y(1)$.

5. Seja dado o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Use o método de Taylor de ordem dois – $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f)(t_i, y_i)$ – para determinar o valor aproximado de $y(1)$.

6. Considere o problema de condição inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0\,,$$

cuja solução exacta é $y(t) = t^2(e^t - e)$.

(a) Use o método de Taylor de ordem dois, com $h = 0.1$, para aproximar a solução e compare com os valores exactos.

(b) Use os valores obtidos em (a) e interpolação linear para aproximar y nos seguintes pontos e compare com os valores exactos:

i. $y(1.04)$; ii. $y(1.55)$; iii. $y(1.97)$.

7. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Determine um valor aproximado para $y(0.8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$k_1 = f(t_i, y_i)\,;$$

$$k_2 = f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_1)\,;$$

$$k_3 = f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_2)\,;$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)\,;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,.$$

8. Aplique o método de Runge-Kutta de quarta ordem ao problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = \cos y\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,. \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com $h = 0.2$, para aproximar $y(1)$.