Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Folha suplementar 3

—◇—

Interpolação polinomial

Construa polinómios interpoladores da função definida por $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ em $[-1, 1]$, usando n+1 pontos igualmente distanciados e usando os pontos

$$x_i = -\cos(\frac{i+1/2}{n+1}\pi), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Construa os polinómios de Hermite usando os mesmos pontos suporte e o polinómio de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$ usando n+1 termos. Considere $n = 3$ e $n = 10$ e comparare os polinómios obtidos com a função f.

Sugestão de resolução:

1. Considerar a função definida por $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

   ```
   f[x_]:=1/(1+25 x^2);
   ```

2. Definir função para determinar $n+1$ pontos equidistantes num intervalo dado, $[a, b]$.

   ```
   nosEquidistantes[a_,b_,n_]:=(
      h=(b-a)/n; Table[a+i*h, {i,0,n}]
   );
   ```

3. Determinar pontos equidistantes, $x_i \in [-1, 1]$, $i = 0, \ldots, 3$, e construir lista de pontos a interpolar, $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 3$.

   ```
   nos2=N[nosEquidistantes[-1,1,3]]; derivadas2=Transpose[f[nos2],f'[nos2]];
   pontos2=Transpose[nos2,f[nos2]]; pontosDerivados2=Transpose[nos2,derivadas2];
   ```

4. Determinar polinómio interpolador de f nos pontos encontrados.

   ```
   p2=InterpolatingPolynomial[pontos2,x]
   h2=InterpolatingPolynomial[pontosDerivados2,x]
   ```

5. Definir função para determinar $n+1$ pontos em $[-1, 1]$, tais que $x_i = -\cos(\frac{i+1/2}{n+1}\pi)$, $i = 0, \ldots, n$.

   ```
   nosDeChebyshev[n_]:=Table[-Cos[(i+.5)/(n+1)Pi], {i,0,n}];
   ```

6. Determinar pontos $x_i = -\cos(\frac{i+1/2}{4}\pi)$, $i = 0, \ldots, 3$, e construir lista de pontos a interpolar, $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 3$.

   ```
   nos3=N[nosDeChebyshev[3]]; derivadas3=Transpose[f[nos3],f'[nos3]];
   pontos3=Transpose[nos3,f[nos3]]; pontosDerivados3=Transpose[nos3,derivadas3];
   ```

7. Determinar polinómio interpolador de f nos pontos encontrados.

   ```
   p3=InterpolatingPolynomial[pontos3,x]
   h3=InterpolatingPolynomial[pontosDerivados3,x]
   ```

8. Determinar polinómio de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$ com 4 termos.

   ```
   s=Normal[Series[f[x],x,0,4]]
   ```

9. Esboçar gráficos de f, dos polinómios interpoladores e do polinómio de Taylor encontrados.

   ```
   g=Plot[f[x], {x, -1, 1}];
   g2=Plot[p2, {x, -1, 1}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}, PlotRange->All];
   g3=Plot[p3, {x, -1, 1}, PlotStyle->{RGBColor[0,1,0]}, PlotRange->All];
   gh2=Plot[h2, {x, -1, 1}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,1]}, PlotRange->All];
   gh3=Plot[h3, {x, -1, 1}, PlotStyle->{RGBColor[0,1,1]}, PlotRange->All];
   gs=Plot[s, {x, -1, 1}, PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]}, PlotRange->All];
   Show[gs,g,g2,g3,gh2,gh3]
   ```