Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Teste 1

—⋄—

Na tabela seguinte são apresentados valores exactos da função $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$,

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

1. Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados.
2. Calcule uma aproximação para o valor da função em $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro e compare-o com o erro efectivamente cometido.

Polinómios interpoladores de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\,.$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\,.$$

Fórmula de erro para o polinómio interpolador

$$E_n = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,, \quad \xi_x \in [x_0, x_n]\,.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Teste 1

—⋄—

Considere o sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 8 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array} \right.$.

1. Efectue duas iterações do método de Gauss-Seidel, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [\,1\;\;2\,]^T$. Indique uma estimativa do erro cometido.
2. Sabendo que as iterações obtidas pelo método de Gauss-Seidel verificam

$$||x^{(k+1)} - x|| \leq \frac{||M||^k}{1 - ||M||}||x^{(1)} - x^{(0)}||, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

   onde M é a matriz de iteração deste método, diga quantas iterações são necessárias para garantir um erro inferior a 0.5×10^{-5}.

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$