Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Teste 2

—◇—

Na tabela seguinte são apresentados valores referentes a uma função Q,

x	0	1	2	3
$Q(x)$	1	-2	9	58

1. Obtenha um valor aproximado de $\int_0^3 Q(x)\,dx$, usando as regras dos trapézios e de Simpson.
2. Sabendo que a função Q é definida por $Q(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ localize todas as suas raízes reais.
3. Efectue uma iteração do método da secante para aproximar a menor raiz de Q, x^*. Indique uma estimativa para o erro cometido.
4. Diga quantas iterações são necessárias para poder garantir um erro inferior a 0.5×10^{-10}, ao usar o método da bissecção para aproximar x^*.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Ano lectivo 1999/2000 Teste 2

—◇—

Considere a função real de variável real definida por $h(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{x^2}$.

1. Aproxime o valor de $\int_1^2 h(x)\,dx$ usando três pontos e a regra dos trapézios. Indique um limite superior para o erro cometido.
2. Mostre que h tem um único ponto fixo real, x^*, e que $x^* \in [-3/2, -1]$.
3. Efectue uma iteração do método de Newton para aproximar x^*.
4. Ao aproximar a solução de $f(x) = 0$ em $[a, b]$ pelo método de Newton verifica-se

$$|e_n| \le M^{2^n-1}|e_0|^{2^n}, \quad M = \frac{1}{2}\frac{\max\limits_{x\in[a,b]}\{|f''(x)|\}}{\min\limits_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

   Quantas iterações são necessárias para garantir um erro inferior a 0.5×10^{-10} ao aproximar x^*?

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Regra de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Método da Secante $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Fórmula do erro para o método da bissecção

$$|e_n| \le \frac{b-a}{2^n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Fórmula do erro para a regra dos Trapézios

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\,, \quad \xi \in [a, b]\,.$$

Método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$