Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

PROBABILIDADES E ESTATíSTICA (Lic. em Eng. Electrotécnica)

ESTATíSTICA (Lic. em Eng. Informática)

Duração: 2h 30m | Exame | 19-1-2000

---

1. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio apresentado.
2. Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular nem de qualquer texto de consulta.
3. Não serão prestados quaisquer esclarecimentos adicionais.

I

Estudos efectuados num grupo de 620 indivíduos mostraram que o consumo de álcool tem efeitos nocivos sobre o fígado e o estômago, podendo mesmo provocar doenças nestes orgãos; mostraram ainda que estas doenças manifestam-se independentemente uma da outra quer na classe dos indivíduos alcoólicos quer na dos não alcoólicos. Constatou-se também que:

- 20% dos indivíduos eram alcoólicos;
- 40% dos indivíduos alcoólicos eram doentes do fígado;
- 76% dos indivíduos alcoólicos não eram doentes do estômago;
- 25% dos indivíduos não alcoólicos eram doentes do fígado.

1. Escolhe-se, ao acaso, um indivíduo do referido grupo.
   (a) Se o indivíduo é doente do fígado, qual a probabilidade de ser alcoólico?
   (b) Calcule a probabilidade do indivíduo ser doente do fígado ou do estômago, sabendo que é alcoólico.
   (c) Sabe-se que 3.92% dos indivíduos desse grupo sofriam simultaneamente das duas doenças referidas.
   Determine a probabilidade do indivíduo escolhido ser doente do estômago, sabendo que não é alcoólico.
2. Retira-se, ao acaso, uma amostra de 48 indivíduos de entre os não alcoólicos. Determine a probabilidade de pelo menos 17 deles serem doentes do fígado.
3. Escolhem-se, ao acaso, 25 pessoas do referido grupo. Seja Z_i a variável aleatória real que representa o peso da i-ésima pessoa escolhida, $i \in \{1, \ldots, 25\}$. Supondo que $Z_1, \ldots, Z_{25}$ são variáveis gaussianas de média 70 Kg e de desvio padrão 10 Kg e independentes, determine a probabilidade do peso médio das 25 pessoas ser superior a 65 Kg.

II

O tempo (expresso em segundos) necessário para provocar uma reacção humana à presença de um certo gás tóxico pode ser considerado uma variável aleatória real contínua, X, admitindo a seguinte função densidade:

$$f_\theta(z) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\theta^2} e^{-\frac{x-5}{\theta}}, & x > 5 \\ 0, & x \leq 5 \end{cases},$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido.

Nestas condições, sabe-se que $E(X) = 2\theta + 5$ e $V(X) = 2\theta^2$.

1. Com o objectivo de estimar θ, considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra de X de tamanho n, com $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Construa, utilizando o método dos momentos, um estimador de θ.

   (b) Mostre que $T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 5\right)$ é um estimador cêntrico e consistente de θ.

2. De entre determinado grupo de pessoas que estiveram na presença desse gás tóxico, escolheram-se, ao acaso, 20 e registou-se, para cada uma delas, o tempo de reacção ao referido gás. Os dado assim obtidos foram resumidos no quadro seguinte.

Tempo de reacção (segundos)	]5, 6.2]	]6.2, 7.4]	]7.4, 8.6]	]8.6, 9.8]
Número de pessoas	3	10	4	3

   (a) Utilizando uma mudança de variável que simplifique os cálculos, determine a média e a variância da amostra.

   (b) Indique uma estimativa consistente de θ.

III

Em determinada linha e fabrico em série existe uma máquina que produz parafusos.

O tempo que a máquina demora a executar esta tarefa pode ser representado por uma variável gaussiana. Quando a máquina está bem regulada, o tempo médio de execução é de 10 segundos com um desvio padrão inferior ou igual a 0.25 segundos.

Se estes requisitos não se verificarem, toda a produção fica consideravelmente prejudicada.

A fim de analisar o estado da máquina, o director de produção registou 17 tempos de execução da referida tarefa, tendo constatado que o correspondente tempo médio era de 10.3 segundos com um desvio padrão de 0.6 segundos.

Tendo em conta os resultados observados,

1. construa um intervalo de confiança para a variância do tempo de execução da referida tarefa, ao grau de confiança 0.9;

2. teste ao nível 0.05, se o tempo médio de execução da referida tarefa é efectivamente 10 segundos;

3. o que poderá o director de produção concluir acerca do estado da máquina?