Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ESTATíSTICA

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 4**

25. De uma caixa que contém 5 cartas numeradas 1, 1, 2, 2, 3, foram retiradas duas aleatoriamente. Seja X a variável aleatória que representa a diferença absoluta dos dois números obtidos. Determine a lei de probabilidade das variáveis aleatórias

a) X **b)** $Y = e^X$.

26. (Frequência de 2/2/96) Uma das experiências que Pavlov realizava, com o objectivo de estudar o comportamento dos animais, consistia em introduzir um rato num compartimento com quatro portas. Embora as portas fossem aparentemente iguais, só uma delas era considerada boa sendo as três restantes consideradas más.

De cada vez que o rato escolhia uma porta má, recebia uma pequena descarga eléctrica e regressava ao ponto de partida. Este processo repetia-se até que o rato escolhesse a porta boa sendo então libertado do compartimento.

(a) Suponhamos que o rato tem memória perfeita, isto é, que em cada nova tentativa ele não escolhe as portas más anteriormente escolhidas e escolhe, de modo equiprovável, uma das que restam.

Seja Y a variável aleatória real que descreve o número de tentativas efectuadas pelo rato até ser libertado do compartimento.

Determine a lei de probabilidade de Y.

(b) Suponha agora que o rato não tem memória, isto é, que em cada tentativa ele escolhe, de modo equiprovável, uma das quatro portas.

Seja Z a variável aleatória real que descreve o número de tentativas efectuadas pelo rato até ser libertado do compartimento.

a) Determine a lei de probabilidade de Z.

b) Calcule $P(Z \geq 5)$.

27. (Exame de 7/9/98) Uma fábrica de cabos eléctricos produz cabos cujo diâmetro X (em milímetros) é uma variável aleatória real de função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , \quad 5 < x < 5+\theta \\ 0 & , \quad x \leq 5 \text{ ou } x \geq 5+\theta \end{cases},$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido.

a) Determine a função de repartição de X.

b) Mostre que o diâmetro médio dos cabos produzidos pela fábrica é $5 + \frac{\theta}{2}$.

c) Sabendo que $E(X^2) = \frac{\theta^2}{3} + 5\theta + 25$, calcule a variância de X.

28. **a)** Determine o valor de k, $k \in \mathbb{R}$, para o qual

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{kx^2}{6}(3-2x) & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{k}{6} & , \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

é a função de repartição de uma v.a. contínua X.

b) Obtenha a função densidade de probabilidade de X.

c) Calcule $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$ e $P\left(X \geq \frac{3}{4}\right)$.

d) Calcule $P\left[X \leq \frac{1}{2} / \left(\frac{1}{3} \leq X < \frac{2}{3}\right)\right]$.

e) Calcule $E(X)$ e $V(X)$.

f) Considere a v.a. $Y = X^2$. Determine a função densidade de probabilidade de Y.

29. Seja $k \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/2} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases} .$$

a) Quais as condições a exigir a f para que seja densidade de probabilidade? Deduzir o correspondente valor de k.

b) Seja X a v.a.r. que tem f por função densidade.

i. Determine a função de repartição de X e trace o respectivo gráfico.

ii. Calcule $P(X < 3)$, $P(X = 5)$, $P(5 < X < 7)$ e $P(5 < X < 7/X > 3)$.

30. (Frequência de 27/1/92) Seja X uma v.a. contínua de função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(x-2)} \exp\left(\frac{-1}{2}\left[\log(x-2) - \theta\right]^2\right) & , \quad x > 2 \\ 0 & , \quad x \leq 2 \end{cases}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ e considere a v.a. $Y = \log(X - 2)$.

a) Exprima a função de repartição de Y em termos da função de repartição de X.

b) Mostre que a densidade da v.a. Y é dada por $f_Y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}(x-\theta)^2\right], x \in \mathbb{R}$.

31. Lançam-se, simultaneamente, dois dados não viciados com as faces numeradas de 1 a 6. Seja X a v.a.r. que representa a diferença absoluta dos dois números observados.

a) Obtenha a lei de probabilidade de X.

b) Calcule a média, a variância, o desvio-padrão, a mediana e os quartis de X.

c) Determine um limite inferior para $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma)$, onde m e σ designam, respectivamente, a média e o desvio padrão de X.

32. Seja $k \in \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ x + 1 & , \quad -1 < x \leq 0 \\ -\frac{2}{k}x + 2, & , \quad 0 < x \leq k \\ 0 & , \quad x > k \end{cases} .$$

a) Determine o valor de k para o qual f é a densidade de probabilidade de uma v.a. X.

b) Calcule a média, o desvio-padrão, a mediana e os quartis de X.

c) Sendo $m = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$, determine um sub-intervalo de $[0, 1]$ que contenha $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$.