ESTATíSTICA

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 7**

51. (Exame de 17/2/94) A Curva de Viadores é uma curva bastante perigosa na EN1, entre Coimbra e a Mealhada, onde os automobilistas devem passar a uma velocidade reduzida.

Perante o elevado número de acidentes registados, motivados por excesso de velocidade, a JAE decidiu ponderar a possibilidade de efectuar obras no referido troço, estando tal decisão dependente da gravidade dos acidentes observados no ano anterior.

Por consulta dos arquivos da Brigada de Trânsito da GNR, sabe-se que o número de feridos provocados por acidente devido a excesso de velocidade, no período e local indicados, é uma v.a.r. de Poisson de parâmetro 0.2 e que um tal acidente é classificado como grave se o número de feridos provocados for pelo menos 2.

a) Mostre que a percentagem de acidentes graves, devidos a excesso de velocidade, observados pela Brigada, no período e local indicados, é 1.75%.

b) A JAE decidiu efectuar as obras se numa amostra de 200 acidentes (escolhida ao acaso de entre os 3000 acidentes do referido tipo, registados no ano anterior) houver pelo menos 7 acidentes graves. Qual a probabilidade de as obras serem efectuadas?

c) Suponhamos que, naquele período, 125 dos acidentes registados no local, por excesso de velocidade, estão suficientemente espaçados no tempo para que possamos admitir que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_{125}$ são independentes, onde X_i denota o número de feridos provocados pelo acidente i, $i = 1, \ldots, 125$. Determine a probabilidade do número total de feridos nesses 125 acidentes ser quando muito 30.

52. (Exame de 10/10/95)Com o objectivo de comprovar a eficácia de um novo medicamento na terapia de determinada doença não contagiosa, o Dr. B. Santos decidiu receitá-lo a 100 pessoas, escolhidas aleatoriamente de um grupo de 200 pacientes, que não possuíam qualquer grau de parentesco.

Após algum tempo, o referido médico constatou que:

- 45% das pessoas a quem não receitou o medicamento curaram-se;
- o medicamento tinha sido receitado a $\frac{1}{12}$ das pessoas que não se curaram.

a) Relativamente ao total dos 200 pacientes do Dr. B. Santos, mostre que a percentagem de pessoas que não se curaram é 30%.

b) Prove que 95% dos doentes a quem foi receitado o medicamento curaram-se.

c) Admitindo que as pessoas reagem ao medicamento independentemente umas das outras, determine a probabilidade de, entre as pessoas a quem foi receitado o medicamento, haver mais de 90 curadas.

5. Estimação Pontual

53. (Frequência de 18/1/89) Os resultados das medições dos comprimentos (expressos em cm) de 20 carpas, extraídas ao acaso de um viveiro, encontram-se resumidos no seguinte quadro:

classes	]10,12]	]12,14]	]14,16]	]16,18]	]18,20]
efectivos	2	3	7	6	2

Determine estimativas cêntricas para a média e variância do comprimento de uma carpa do viveiro.

54. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória, de dimensão n, $n \in \mathbb{N}$, de uma população X cuja lei de probabilidade é caracterizada pela seguinte função densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta}\left(1 - \dfrac{x}{\theta}\right) & , \quad 0 < x < \theta \\ 0 & , \quad x \notin]0, \theta[\end{cases},$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido.

a) Mostre que $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ não é um estimador cêntrico de θ.

b) Construa, a partir de T_n, um estimador de θ, T_n', que seja cêntrico.

c) Prove que T_n' é um estimador consistente de θ.

d) Suponha que se recolheu, ao acaso, uma amostra de X, de dimensão 100, $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$, para a qual se constatou que $\overline{x} = 20,2$. Indique uma estimativa cêntrica e consistente de θ.

55. Seja X uma variável aleatória real cuja lei de probabilidade admite a seguinte função densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1/2 \\ 1 - \theta & , \quad -1/2 \leq x \leq 0 \\ 1 + \theta & , \quad 0 < x \leq 1/2 \\ 0 & , \quad 1/2 < x \end{cases},$$

onde θ é um parâmetro desconhecido, $\theta \in [-1, 1]$. Com o objectivo de estimar θ, considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X.

a) Determine, utilizando o método dos momentos, um estimador convergente de θ, T_n.

b) Mostre que T_n é um estimador cêntrico de θ.

c) Para n grande, que pode afirmar sobre a lei desse estimador?

56. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da v.a.r. X cuja lei de probabilidade é caracterizada pela seguinte função densidade

$$f_{(a,b)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ 0 & , \quad x \notin [a, b] \end{cases},$$

onde a e b são dois parâmetros reais desconhecidos, com $a < b$.

a) Mostre que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $E(X^2) = \dfrac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ e $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

b) Utilizando o método dos momentos, determine estimadores convergentes para:

- **i)** o ponto médio de $[a, b]$;
- **ii)** o limite inferior de $[a, b]$;
- **iii)** o limite superior de $[a, b]$;
- **iv)** amplitude de $[a, b]$.

c) Suponha que se extraiu, ao acaso, uma amostra de X e que se resumiu no quadro seguinte:

classes	]10,12]	]12,14]	]14,16]	]16,18]	]18,20]
efectivos	4	6	6	4	5

Tendo em conta os resultados obtidos na alínea **b)** calcule, utilizando uma mudança de variável que simplifique os cálculos, estimativas convergentes de a e b.