ESTATíSTICA

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 8**

57. (Exame de 7/9/98) Uma fábrica de cabos eléctricos produz cabos cujo o diâmetro X (em milímetros) é uma variável aleatória real de função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 5 < x < 5+\theta \\ 0, & x \leq 5 \text{ ou } x \geq 5+\theta \end{cases},$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido. Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de X $(n \in \mathbb{N})$.

a) Mostre que o estimador de θ, construído pelo método dos momentos, é dado por

$$\hat{\theta}_n = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 5\right).$$

b) Prove que $\hat{\theta}_n$ é um estimador cêntrico de θ e cuja variância tende para zero quando o tamanho da amostra tende para infinito.

c) Selecionara-se aleatoriamente 20 cabos eléctricos da produção da fábrica e registaram-se os respectivos diâmetros no quadro seguinte:

Diâmetro (mm)	]5,5.2]	]5.2,5.4]	]5.4,5.6]	]5.6,5.8]	]5.8,6]
Número de cabos	4	3	5	4	4

i) Utilizando uma mudança de variável que simplifique os cálculos, determine a média e a variância da amostra.

ii) Indique uma estimativa cêntrica para θ.

58. Admita que determinada população pode ser representada por uma v.a.r. X cuja lei de probabilidade é caracterizada pela seguinte função densidade:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases},$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido.

a) Com o objectivo de estimar θ, seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da v.a.r. X.

i) Construa um estimador de θ, utilizando o método dos momentos.

ii) Mostre que $T_n = \dfrac{1}{S_n'^2}$ é um estimador consistente de θ^2.

b) Suponha que o tempo de funcionamento (expresso em milhares de horas) de determinado tipo de componentes electrónicas produzidas pela empresa A pode ser representado por uma v.a.r. Y com a mesma lei de probabilidade que X.

Da produção de componentes da empresa A, escolheram-se aleatoriamente 100 componentes, tendo-se registado o tempo de funcionamento de cada uma delas. Os dados obtidos foram resumidos no quadro seguinte:

tempo de func. (milh. horas)	]8,9]	]9,10]	]10,11]	]11,12]
número de componentes	29	26	24	21

Utilizando uma mudança de variável que simplifique os cálculos, determine uma estimativa cêntrica e consistente de $\dfrac{1}{\theta}$.

6. Intervalos de Confiança

59. (Exame de 24/1/97) O tempo, em microssegundos, que um determinado computador leva a efectuar uma operação de multiplicação é uma variável aleatória real X que segue uma lei normal de média m desconhecida, $m \in \mathbb{R}$, e desvio padrão 3. Seja $(X_1, \ldots, X_9)$ uma amostra aleatória da v.a.r. X.

a) Identifique a lei de $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$.

b) Sabe-se que o tempo que o computador levou a efectuar 9 operações de multiplicação foi de 360 microssegundos. Determine um intervalo de confiança para m, ao grau de confiança de 0.95.

60. Considere que o tempo, expresso em minutos, que um atleta demora a percorrer determinado percurso com 10 Km pode ser representado por uma variável aleatória real de média m desconhecida, $m \in \mathbb{R}^+$, e de desvio padrão 5. Observou-se que, durante a sua preparação para determinada competição internacional, a média dos tempos registados em 100 dos treinos que o atleta efectuou naquele percurso foi de 30 minutos. Face à amostra observada, construa um intervalo de confiança para o tempo médio, com grau de confiança 0.95.

61. Sabe-se que as classificações, X, de determinado curso são normalmente distribuídas. Foi recolhida uma amostra de 42 classificações para as quais se obteve

$$\sum_{i=1}^{42} x_i = 588 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{42} x_i^2 = 8400.$$

a) Determine as estimativas cêntricas para a média e para a variância da população.

b) Qual o grau de confiança que permite afirmar que o verdadeiro valor da média se encontra no interior de um intervalo de amplitude 1.224?

62. Numa fábrica de automóveis existe uma secção destinada à produção de determinado tipo de peças, cujo o comprimento deverá ser, aproximadamente, de 2,5 cm. A secção de controlo de qualidade da referida fábrica afirma que as peças apresentam comprimentos superiores aos exigidos. Com o objectivo de avaliar a veracidade da afirmação proferida pela secção de controlo de qualidade, seleccionou-se ao acaso uma amostra de 26 peças na produção de um dia, tendo sido os resultados obtidos resumidos no seguinte quadro:

comprimentos (cm)	]1.5,2]	]2,2.5]	]2.5,3]	]3,3.5]	]3.5,4]	]4,4.5]
efectivos	1	2	10	10	2	1

a) Calcule estimativas cêntricas para o comprimento médio das peças e para a correspondente variância.

b) Admitindo a normalidade da população subjacente aos dados:

i) Construa um intervalo de confiança para o comprimento médio das peças, com grau de confiança 0.95. Terá a secção de controlo de qualidade razão?

ii) E supondo que a média é 3, determine agora um intervalo de confiança para a variância com grau de confiança 0.95.

63. Um ecologista, ao pretender investigar o nível de poluição por mercúrio em determinado lago, seleccionou aleatóriamente 20 peixes do referido lago e mediu a concentração de mercúrio nos mesmos. Os dados obtidos foram resumidos no quadro seguinte:

classes	]0,1]	]1,2]	]2,3]	]3,4]	]4,5]	]5,6]
efectivos	1	4	6	4	3	2

a) Determine a média e a variância da amostra.

b) Admitindo a normalidade da população, determine um intervalo de confiança para a variância da população em estudo, ao grau de confiança de 0.95.