Métodos Estatísticos

1998/99 Folha No. 3

19. Considerem-se três acontecimentos A, B e C tais que $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathrm{P}(A) = 0.3$, $\mathrm{P}(B^c) = 0.7$, $\mathrm{P}(C) = 0.5$ e $A \cap B = C \cap B = \emptyset$. Calcule $\mathrm{P}(A \cap C)$.

20. Se lançarmos uma moeda ao ar 3 vezes, qual a probabilidade de

    a) encontrarmos exactamente 1 cara (acontecimento A);

    b) encontrarmos pelo menos uma cara (acontecimento B);

    c) não encontrarmos nenhuma cara (acontecimento C);

    d) A^c, B^c e C^c;

21. Dispõe-se, ao acaso, um grupo de 5 rapazes e 10 raparigas em fila. Qual a probabilidade de na primeira posição da fila estar um rapaz? E na última? E qual a probabilidade de a primeira posição ser ocupada por um dado rapaz?

22. Uma região administrativa Ω tem a forma de um quadrado. Na família dos seus subconjuntos (mensuráveis) consideramos definida a função $\mathrm{P}(A)$ dada pelo quociente entre as áreas de A e de Ω (uma probabilidade geométrica). Suponhamos que esta região é dividida em 3 tiras A, B e C, de áreas iguais, onde o valor por unidade de área dos terrenos está na proorção $1 : 3 : 2$. Para cada subconjunto (mensurável) $S \subset \Omega$ defina-se

$$\mathrm{Q}(S) = \frac{\mathrm{P}(S \cap A) + 3\,\mathrm{P}(S \cap B) + 2\,\mathrm{P}(S \cap C)}{2}.$$

    Mostre que a aplicação Q é uma probabilidade definida sobre a família dos subconjuntos (mensuráveis) de Ω.

23. De um baralho com 52 cartas retira-se uma primeira carta e seguidamente, sem voltar a recolocar a carta retirada, uma segunda carta.

    a) Identifique um espaço fundamental.

    b) Calcule a probabilidade de obter uma dama e um rei.

    c) Calcule a probabilidade de obter pelo menos uma carta preta.

    d) O que se altera nas alíneas anteriores se a primeira carta retirada for recolocada no baralho antes de escolher a segunda?

24. Uma pessoa tenta abrir uma porta dispondo de um chaveiro com n chaves das quais apenas uma servirá para abriri efectivamente a porta. Qual a probabilidade de serem necessárias k escolhas de chave se, de cada vez que escolher uma que não abre a atirar fora? E qual o valor desta probabilidade se a chave que não serve voltar a ser colocada no chaveiro?

25. Lançam-se ao ar 5 moedas equilibradas e define-se E como o acontecimento correspondente a sa 'ırem 5 caras. Considera-se agora a variável aleatória $\mathbb{1}_E$ que toma o valor 1 se ocorrer o acontecimento E e o valor 0 no caso contrário. Para que elementos do espaço fundamental toma a variável aleatória o valor 1? Calcule $\mathrm{P}(\mathbb{1}_E = 1)$.

26. Lançam-se ao ar dois dados cujas faces estão numeradas de 1 a 6. Representa-se por X o mínimo dos números obtidos.

    a) Justifique que X é discreta e determine a sua distribuição.

    b) Determine a função de distribuição de X.

c) Calcule $P(X < 3)$ e $P(2 < X \leq 4)$.

27. Considere-se a função

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1/4 & \text{se } x \in [1,2) \\ 3/4 & \text{se } x \in [2,3) \\ k/8 & \text{se } x \in [3,4) \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Determinar k por forma que F seja a função de distribuição de alguma variável aleatória X.

b) Quais os valores que X pode assumir?

c) Calcular $P(2 < X \leq 4)$ e $P(2 \leq X \leq 4)$.

28. A função de distribuição de uma variável aleatória X é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0.5 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.6 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{se } 3 \leq x < 3.5 \\ 1 & \text{se } x \geq 3.5 \end{cases}$$

Justifique que a variável aleatória X é discreta e calcule a sua função de probabilidade.

29. Um indivíduo diz ter *percepção extra sensorial* (PES). Para o testar atira-se ao ar uma moeda 10 vezes, pedindo-se-lhe que adivinhe o resultado, acertando por 7 vezes. Qual a probabilidade de obter o mesmo resultado sem PES?

30. Suponhamos que há apenas dois partidos, que serão designados por A e B. Os eleitores que são adeptos do partido A constituem 55% dos votantes, enquanto que os adeptos do partido B são 45% dos votantes (não há indecisos nem abstencionistas). Se o número de votantes é 10 milhões qual a probabilidade de, ao escolhermos 1 milhão de pessoas, encontrarmos metade de cada partido?

31. Se chegar à paragem do autocarro às 10.00 horas e souber que a variável aleatória que descreve a hora de chegada deste é uniforme entre as 10.00 horas e as 10.30 horas, qual a probabilidade de ter de esperar mais do que 10 minutos?

32. A variável aleatória X tem densidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 10 \\ \dfrac{10}{x^2} & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Calcule a função de distribuição de X. Quanto vale $P(X > 20)$?

33. Seja X uma variável aleatória contínua admitindo densidade $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ e defina-se $Y = e^{-X}$. Caracterize a distribuição da variável aleatória Y.

34. Uma companhia aérea observou que a probabilidade de um passageiro com bilhete não comparecer ao vôo é igual a 0.05. Consequentemente decidiu passar a vender 52 bilhetes para cada avião com 50 lugares. Qual a probabilidade de, para um dado av ião, haver lugar no avião para todos os passageiros que se apresentarem ao vôo?