47. (A urna de Pólya) Uma urna contém 1 bola branca e 1 bola preta. Faz-se uma primeira tiragem de uma bola que é reposta na urna juntamente com outra da mesma cor. Procede-se depois a uma segunda tiragem com as mesmas regras. Representamos por X_n o número de bolas pretas que saíram até à $n^{\text{ésima}}$ tiragem.

    a) Calcule $\mathrm{P}(X_n = k | X_{n-1} = m)$ para todos os valores possíveis de k e m.

    b) Mostre que $\mathrm{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

48. Consideremos um vector aleatório (X, Y) cuja distribuição é dada pelo quadro seguinte:

		Y			
		-1	0	1	2
X	-1	0.1	0.15	0	0.1
	0	0.15	0	0.1	0.2
	1	0.05	0.05	0	0.1

Calcule $\mathrm{P}(Y = k | X = -1)$, $\mathrm{P}(Y = k | X = 0)$ e $\mathrm{P}(Y = k | X = 1)$.

49. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuições de Poisson de parâmetros λ e μ, respectivamente.

    a) Verifique que $X + Y$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda + \mu$.

    b) Calcule $\mathrm{P}(X = k | Y = n)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

50. O número de acidentes de trabalho por semana numa obra é representado por uma variável aleatória X com distribuição $\mathrm{P}(X = 0) = 0.7$, $\mathrm{P}(X = 1) = 0.2$, $\mathrm{P}(X = 2) = 0.1$. A variável aleatória que representa o número de acidentes de trabalho durante um mês é $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ onde cada uma variáveis X_1, X_2, X_3 e X_4 têm a mesma distribuição que X e são independentes. Qual a distribuição de Y?

51. Uma pesquisa telefónica está para ser efectuada na área de Coimbra. A informação obtida em pesquisas anteriores diz-nos que em 60% das chamadas quem atende é do sexo feminino. Suponha que se pretendem fazer três chamadas.

    a) Calcule a probabilidade de as três chamadas serem atendidas por mulheres.

    b) Calcule a probabilidade de apenas uma das chamadas ser atendida por uma mulher.

    c) Calcule a probabilidade de nenhuma das chamadas ser atendida por uma mulher.

52. O número de horas de funcionamento de certo tipo de componente electrónico é descrito por uma variável aleatória contínua com densidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

    a) Qual a probabilidade de a componente não funcionar mais do que 200 horas?

    b) Poderá indicar valores mínimos e máximos para o tempo de funcionamento desta componente?

c) Se dispusermos 5 destas componentes, qual a probabilidade de 2 delas necessitarem de ser substituídas durante a primeiras 150 horas de utilização.

53. Um canal de telecomunicações transmite sequências de 0 e de 1. No entanto, para cada símbolo enviado, devido a efeitos de estática a probabilidade de que o símbolo recebido esteja errado é 0.2. Para tentar evitar este efeito, optou-se por transmitir a sequência 0000 em vez de 0 e a sequência 1111 no lugar de 1. O receptor, para descodificar a mensagem, interpreta cada sequência de quatro símbolos como representando 0 se contiver pelo menos três 0 e como 1 no caso contrário. Quando se pretende transmitir apenas um símbolo qual a probabilidade de o receptor o interpretar correctamente? Que hipóteses de independência estão a ser assumidas?

54. Um satélite contém 4 componentes e pode operar adequadamente se pelo menos 2 delas estiverem em funcionamento. Se cada componente estiver em funcionamento com probabilidade 0.6 e for independente das outras, qual a probabilidade de o satélite funcionar?

55. O número de milhares de quilómetros que um automóvel percorre antes de necessitar de ser retirado da circulação pode ser representado por uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 0.002$, isto é, com densidade $f(x) = 0.002\, e^{-0.002x} \mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x)$. Se adquirir um automóvel em segunda mão com 50 000 quilómetros, qual a probabilidade de poder utilizá-lo durante pelo menos mais 100 000 quilómetros? Repita o problema supondo que a distribuição não é exponencial mas uniforme no intervalo $[0, 1\,000]$ (a unidade continua a ser o milhar de quilómetros).

56. O enchimento de sacos de cimento é efectuado de forma automatizada, fazendo com que o peso efectivo de cada saco varie um pouco. Assim, para sacos com peso anunciado $10\, Kg$ verificou-se que o peso efectivo é descrito por uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros $(10.2, 0.24)$. Ao receber uma encomenda é efectuada uma pesagem em grupos de 5 sacos, por uma questão de controlo.

   a) Qual a probabilidade de um saco de cimento pesar menos do que $9.5\, Kg$?

   b) Qual a distribuição da variável aleatória que representa o peso de um grupo de 5 sacos?

   c) Qual a probabilidade de, num grupo de 5 sacos, haver pelo menos 3 pesando mais do que $11\, Kg$?

   d) Se se recusar o grupo de 5 sacos se o seu peso for inferior a $48\, Kg$, qual a probabilidade de o recusarmos?

57. Num viveiro temos 50 trutas e 150 salmões. De entre as trutas 5 são machos enquanto que 105 dos salmões são fêmeas.

   a) Se retirarmos um peixe qual a probabilidade de encontrarmos um salmão macho?

   b) Se retirarmos 15 peixes qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos 10 machos?

   c) Suponha que cada truta fêmea produz descendência em número que pode ser descrito por uma variável de Poisson com parâmetro 1.8. Qual a probabilidade de a próxima geração de trutas ter mais do 108 elementos?