93. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de uma variável aleatória com distribuição contínua e densidade $f(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$. Qual o estimador para o parâmetro θ utilizando o método dos momentos e utilizando o método da máxima verosimilhança.

94. Mesma questão, supondo agora que a densidade é $f(x) = \theta e^{-(\theta-1)x}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)$.

95. Suponha que tem a seguinte amostra: 0.5, 0.75, 1.25, 1.9, 2.1, 2.2, 2.25, 2.3, 3.1, 3.7, 4.5, 4.9.

    a) Construa um histograma. Será razoável supor que a distribuição subjacente é normal?
    b) Se supusermos que a distribuição subjacente é $\mathcal{N}(\mu, 2)$, qual a aproximação que propõe para μ?
    c) E se a distribuição de base for $\mathcal{N}(2, \sigma^2)$, que aproximação propõe para σ^2?
    d) E se a distribuição de base for $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, que aproximação propõe para (μ, σ^2)?
    e) Suponha que a densidade da distribuição subjacente é da forma $f(x) = \frac{2x}{bc}\mathbb{1}_{[0,b]}(x) + \frac{2(x-c)}{c(b-c)}\mathbb{1}_{(b,c]}(x)$. Que aproximação propõe para b se souber que $c = 6$? Que aproximação propõe para c se souber que $b = 3$? Que aproximação propõe para (b, c)?

96. A partir do instante de abertura de um guichet registam-se os momentos de chegada de novos clientes (em minutos): 10, 20, 25, 27, 33, 40, 50, 68, 72, 80, 100, 102, 115, 120, 126, 150, 180, 182, 189, 250, 288.

    a) A variável que descreve o intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas é suposta seguir uma distribuição exponencial com densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Calcule uma aproximação para λ.
    b) A variável aleatória que conta o número de clientes por cada intervalo de 20 minutos é suposta seguir uma distribuição de Poisson de parâmetro λ. Qual a probabilidade de num intervalo de 20 minutos chegarem pelo menos 3 novos clientes?

97. Considere a seguinte amostra

-0.800	-0.362	-1.383	-1.923	-1.183	-2.014	-1.593	0.146	-1.914	2.180
-0.397	2.057	0.097	1.385	-1.567	0.356	0.926	0.746	0.118	-0.714
-0.244	0.058	0.569	-0.187	1.193	-0.695	1.343	-1.151	2.045	-2.331

    a) Construa um histograma.
    b) É razoável supor que a variável aleatória que gerou a amostra tem distribuição uniforme num intervalo da forma $[-\theta, \theta]$?
    c) Construa uma aproximação para θ

98. Uma amostra $X_1, \ldots, X_{100}$ de uma variável aleatória X forneceu resultados cuja contagem é apresentada na tabela seguinte.

intervalo	$(0,2]$	$(2,4]$	$(4,6]$	$(6,8]$	$(8,10]$
contagem	30	18	15	18	19

A média da amostra é igual a 4.577 e o seu desvio padrão igual a 3.044. Sabemos ainda que o menor valor da amostra é 0.033 e o maior valor presente na amostra é 9.805. O histograma que se pode construir a partir destes dados sugere que estes podem ter sido gerados por uma variável aleatória com distribuição uniforme em algum intervalo da forma $[0, \theta]$. Designemos por T_1 o estimador da máxima verosimilhança.

a) Mostre que $T_1 = \max_{1\leq i\leq 100} X_i = X_{(100)}$.

b) Calcule o valor médio de T_1. É cêntrico?

c) Calcule, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, $\mathrm{P}\left(|T_1 - \theta| \leq \varepsilon\right)$ e mostre que esta probabilidade tende para 1 à medida que o tamanho da amostra aumenta.

d) Podemos considerar o estimador T_2 construído a partir do seguinte raciocínio: os 100 pontos da amostra dividem o intervalo $[0, \theta]$ em 101 intervalos cuja amplitude deverá ser mais ou menos igual, logo dada por $\theta/101$. Logo deveríamos empurrar o valor de T_1 para a direita de $T_1/100$, o que sugere o estimador

$$T_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_1 = \frac{n+1}{n} T_1.$$

Mostre T_2 é cêntrico para θ.

e) Calcule as aproximações para θ com base em cada um dos estimadores definidos. Qual das aproximações lhe parece ser a melhor?

f) Um outro ajustamento possível a fazer a T_1 consiste em raciocinar por simetria: em média a maior observação deve estar à mesma distância de θ que a menor observação está de 0. Obtemos assim o estimador

$$T_3 = \min_{1\leq i\leq 100} X_i + \max_{1\leq i\leq 100} X_i = X_{(1)} + X_{(100)} = X_{(1)} + T_1.$$

Mostre que $\mathrm{E}(T_3) = \theta$.

g) Podemos ainda argumentar que o intervalo $[0, \theta]$ está dividido em 101 intervalos de amplitude sensivelmente igual. Portanto o comprimento total será igual a 101 vezes o comprimento do primeiro intervalo. Teremos assim o estimador

$$T_4 = 101 \min_{1\leq i\leq 100} X_i = 101\, X_{(1)}.$$

Calcule, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, $\mathrm{P}\left(|T_4 - \theta| \leq \varepsilon\right)$. Mostre que, se o tamanho da amostra crescer, esta probabilidade não converge para 1. Que lhe parece a qualidade deste estimador?

h) A partir de cada estimador, que aproximação indica para $\mathrm{P}(X > 8)$?

99. O ponto de fusão de 24 peças de chumbo é medido, obtendo-se os registos seguintes (em graus centígrados):

330.0	328.6	342.4	334.0	337.5	341.0	343.3	329.5
322.0	331.0	340.4	326.5	327.3	340.0	331.0	332.3
345.0	342.0	329.7	325.8	322.6	333.0	341.0	340.0

Qual a probabilidade de uma porção de chumbo apresentar um ponto de fusão inferior a 335^oC supondo que a distribuição destas temperaturas

a) é $\mathcal{N}(\mu, 10)$;

b) é $\mathcal{N}(\mu, 5)$;

c) é $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;

d) é exponencial de parâmetro θ;

e) admite densidade $f(x) = \dfrac{2(x-325)}{20(b-325)} \mathbb{I}_{[325,b]}(x) + \dfrac{(2(x-345)}{20(b-345)} \mathbb{I}_{(b,345]}(x)$.