1 Introdução

A chamada "série harmónica", $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$ desde cedo suscitou interesse entre os matemáticos. Infelizmente esta série diverge, o que se verifica por os termos termo $\frac{1}{n}$, apesar de tenderem para 0, serem demasiado grandes. Assim, para que fazer a série convergir substituimos cada parcela $\frac{1}{n}$ por uma parcela ligeiramente mais pequena, $\frac{1}{n^s}$, onde $s > 1$ é um número real.

Assim se define a função zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Na realidade a função zeta tem como domínio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, ou seja, s pode ser qualquer número complexo excepto o próprio 1. No entanto, para números complexos cuja parte real seja menor ou igual a 1 a função não pode ser escrita nesta forma.

Por outro lado, Euler mostrou que

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \tag{1}$$

onde o produtório é sobre todos os primos. Esta fórmula vem de que se $s > 1$, então $p^{-s} < 1$ e assim $\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... = \sum_{c=0}^{\infty} p^{-cs}$. Depois multiplicando as séries ficamos com o termo geral do produto da forma $p_1^{-c_1 s}...p_k^{-c_k s} = \frac{1}{n^s}$ onde $p_1, ..., p_k$ são primos distintos e $n = p_1^{c_1}...p_k^{c_k}$. Como cada inteiro tem uma representação única dessa forma, ficamos com exactamente as parcelas de $\zeta(s)$.

2 Convergência

Se ainda não conheces a prova é um bom exercício provar que de facto a série harmónica diverge e que, por conseguinte $\zeta(s)$ diverge para todo o $s \leq 1$.

Apresetamos de seguida a prova desse facto:

Seja $s \leq 1$. Então temos

$$\frac{1}{2^s} \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \geq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{5^s} + ... + \frac{1}{8^s} \geq \frac{1}{2}$$

e por aí fora. Assim $\zeta(s) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$ e por isso diverge.

O recíproco é um resultado igualmente trivial. Se souberes um pouco de cálculo podes usar o integral da função $f(x) = \frac{1}{x^s}$ entre 1 e ∞. Apresentamos de seguida uma demonstração elementar desse facto:

Seja $s > 1$. Então temos que:

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \leq \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = 2^{1-s}$$
$$\frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{7^s} \leq \frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{4^s} = \left(2^{1-s}\right)^2$$
$$\frac{1}{8^s} + ... + \frac{1}{15^s} \leq \frac{1}{8^s} + ... + \frac{1}{8^s} = \left(2^{1-s}\right)^3$$

Então temos que $\zeta(s) \leq 1 + 2^{1-s} + \left(2^{1-s}\right)^2 + \left(2^{1-s}\right)^3 + ...$, onde a série geométrica da direita comverge porque $0 < 2^{1-s} < 1$ para $s > 1$.

Chegámos ao resultado $1 < \zeta(s) < \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-s}\right)^n = \frac{1}{1-2^{1-s}}$ e portanto temos que $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1$

3 Aplicações aos números primos

Podemos com esta teoria provar de forma alternativa que existem infinitos primos, pois $\zeta(1)$ diverge, mas se houvesse um número finito de primos, pela equação (1), $\zeta(1)$ também seria finito. Podemos extender esta ideia e provar o seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja p_n o n-ésimo primo. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ...$$

diverge.

Demonstração. Se $\sum \frac{1}{p_n}$ convergisse para um número finito, l, então as somas parciais, $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n} - l\right| < \frac{1}{2}$ para N suficientemente grande. Assim $\sum_{n>N} \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{2}$ para esses N e então:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n>N} \frac{1}{p^n}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Seja $q = p_1...p_N$. Todo o número da forma $qr + 1 = p_{n_1}...p_{n_k}$, $r \geq 1$ tem todos os primos que o dividem maiores que p_N e portanto $\frac{1}{p_{n_1}...p_{n_k}}$ aparece em $\left(\sum_{n>N} \frac{1}{p^n}\right)^k$ e portanto a soma de todos esses números é menor que 1.

Por outro lado, como a série hamónica diverge, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{qr+1} > \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{qr+q} = \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r}$ que diverge, o que é uma contradição.

Assim a assumpção que $\sum \frac{1}{p_n}$ é falsa e a soma diverge.

■

Exercício 1 *Prova que* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\frac{\phi(n)}{n} < \varepsilon$.

4 Inteiros Aleatórios

Nesta secção vamos começar por resolver o problema:

Problema 1 *Calcula a probabilidade de um ponto do plano de coordenadas inteiras escolhido ao acaso seja visivel da origem.*

O enunciado deste problema não é muito rigoroso mas passamos a explicar o que se pretende: Um ponto (a, b) é visível da origem se não estiver outro ponto de coordenadas inteiras no segmento entre esse ponto e a origem, ou seja, se a e b são primos entre si. Por outro lado, não existe uma probabilidade (no sentido tradicional) nos inteiros porque se $\sum p(n) = 1$ onde a soma corre todos os inteiros n (a probabilidade de tirar algum inteiro é 1) e a probabilidade de cada inteiro ser escolhido por a mesma, p, então $p = 0$ e a série não dá 1, ou $p > 0$ e a série diverge...

Para contornar este problema não se define a probabilidade de sair um certo inteiro mas sim a probabilidade de esse inteiro ser $\equiv a \pmod b$ e que é $\frac{1}{b}$.

Seja P a probabilidade prentendida, ou seja, de que dois inteiros escolhidos ao acaso sejam coprimos. Assim escolhidos dois inteiros a e b ao acaso, a probabilidade do seu máximo divisor comum ser n é de: $P(a \equiv 0 \pmod n) \times P(b \equiv 0 \pmod n) \times P(\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{n}$ sejam coprimos$) = \frac{P}{n^2}$.

Como o máximo divisor comum de a e b tem de existir e é único, a soma destas probabilidades para todos os n tem de ser 1, ou seja:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(mdc(a, b) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{n^2} = P\zeta(2) \Rightarrow P = \frac{1}{\zeta(2)}$$

Exercício 2 *Calcula a probabilidade de, escolhidos k inteiros ao acaso não terem um divisor comum maior que* 1*, ou seja, a probabilidade de, escolhido um ponto de coordenadas inteiras ao acaso em $\mathbb{R}^n$ ele ser visível da origem.*

Exercício 3 *Seja $s \geq 2$ um inteiro. Calcula a probabilidade de, escolhido um inteiro ao acaso, ele não ser múltiplo de nenhuma potência com expoente s maior que* 1*.*

5 Calculando $\zeta(2)$

Há vários argumentos modernos para calcular estes valores, no entanto o método que apresentamos de seguida baseia-se na ideia de Euler e, tal como ele fez, não vamos justificar com todo o detalhe alguns passos.

Seja $p(z)$ um polinómio em $\mathbb{C}[z]$, com raízes $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Possivelmente multiplicando $P(z)$ por uma constante, podemos escrever $P(z) = (1 - \frac{z}{\alpha_1})...(1 - \frac{z}{\alpha_k})$.

A ideia essencial é supor que a função $\sin z$ é um polinómio com raízes em $n\pi$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$ e que pode ser escrito como:

$$\sin z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{2}$$

Na realidade esta expansão do sin é válida mas não iremos provar isso aqui.

Expandindo o último termo em (2) obtemos uma série de potências de z. Pelo teorema de Taylor, há apenas uma extensão da função analítica $\sin z$ em série de potências, e essa é a conhecida série de Taylor, que no caso do sin tem como coeficiente do termo z^3 $-\frac{1}{3!}$. Por outro lado a expansão do último termo de (2) tem como coeficiente de z^3 $-\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2\pi^2}$.

Como esse coeficiente tem de ser o mesmo obtemos a expressão $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Com argumentos similares, mas que são mais complexos, podemos calcular $\zeta(2k)$ para qualquer $k = 1, 2, ...$, chegando a:

$$\zeta(2k) = \frac{-(-1)^k 2^{2k} \pi^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$$

onde B_k representa o k-ésimo número de Bernoulli, que aparecem da expansão em série de Taylor da função $\frac{t}{e^t - 1}$.

6 Séries de Dirichlet

Teorema 2

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

A demonstração é deixada como exercício com a sugestão de usar o princípio de inclusão exclusão. A sua demonstração será dada posteriormente.

Definição 1 *Seja f uma função aritmética. Então a sua série de Dirichlet é a série:*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Da mesma forma que as funçõpes geradoras são úteis para estudar sequências definidas por relações de recurrência, as séries de Dirichlet são úteis para estudar funções aritméticas. Por exemplo, foi usando séries destas que Dirichlet provou o famos so teorema de Dirichlet que afirma que se $(a, b) = 1$ então existem infinitos primos da forma $an + b$.

exemplo 1

1. *Se $f(n) \equiv 1$ então $F(s) = \sum 1/n^s = \zeta(s)$*
2. *Se $f(n) = n$, então $F(s) = \sum n/n^s = \zeta(s-1)$*

Teorema 3 *Sejam:*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \qquad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

com $h = f * g$. Então $H(s) = F(s)G(s)$ para todo o s tal que $F(s)$ e $G(s)$ ambas convergem absolutamente.

Demonstração. Se $F(s)$ e $G(s)$ convergem absolutamente, então podemos multiplicar os termos e reordena-los como quisermos. Temos então:

$$F(s)G(s) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s} . \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s} \quad =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{mn=k} \frac{f(m)g(n)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s} = H(s)$$

■

Demonstramos agora rapidamente o teorema (2):

Demonstração. Seja $f(n) = 1$ e $g(n) = \mu(n)$. Então já vimos que $(f * g)(n) = \delta_{1,n}$ onde $\delta_{1,n} = 1$ se $n = 1$ e 0 se $n > 1$. Também já vimos no exemplo (1) que $\sum f(n)/n^s = \zeta(s)$ Assim, usando o teorema anterior temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

■

Exercício 4

Prova que:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$

Exercício 5 *Calcula* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}$ *em termo da função zeta de Riemann, onde* $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

Exercício 6 *Seja* $\nu(n)$ *o número de primos distintos que dividem* n. *Prova que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{p} \frac{1}{p^s}$$

onde a soma é sobre todos os primos p. Para que reais s é que a soma é válida?

Definição 2 *Uma função aritmética é completamente multiplicativa se* $f(ab) = f(a)f(b)$ *para todos os a e b inteiros positivos.*

Por exemplo as funções $f(n) = 1$, $f(n) = n$ ou $f(n) = \delta_{1,n}$ são completamente multiplicativas mas as funções $f(n) = \phi(n)$ e $f(n) = \tau(n)$ não são.

Teorema 4 *Se f é multiplicativa e $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p}(1 + f(p) + f(p^2) + ...)$.*

Se para além disso f é completamente multiplicativa então $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p}(\frac{1}{1 - f(p)})$

Demonstração. Para a primeira parte é apenas multiplicar e utilizar a multiplicatividade e o teorema fundamental da aritmética, para a segunda basta utilizar a soma da progressão geométrica. ■