# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 10º ANO

# RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

## GRUPO I

**1.** A região sombreada é a intersecção de duas regiões:

- o círculo de centro no ponto $(2, -1)$ e raio $2$, que é definido pela condição $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4$
- o semiplano definido pela condição $y \geq 0$

Resposta **B**

**2.** O gráfico da função $f$ é o transformado do gráfico da função definida por $y = |x|$, pela translação associada ao vector de coordenadas $(a, b)$.

Por observação do gráfico, verificamos que $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

Resposta **B**

**3.** Tem-se:

$g(x) = 3 \Leftrightarrow |x| + 7 = 3 \Leftrightarrow |x| = -4$ Equação impossível

$g(x) = 5 \Leftrightarrow |x| + 7 = 5 \Leftrightarrow |x| = -2$ Equação impossível

$g(x) = 7 \Leftrightarrow |x| + 7 = 7 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g(x) = 9 \Leftrightarrow |x| + 7 = 9 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Resposta **D**

**4.** Sendo o gráfico de $f$ uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem ordenada igual a $3$, o gráfico de $-f$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem ordenada igual a $-3$.

Portanto, o gráfico de $g$ é o transformado do gráfico de $-f$, pela translação associada ao vector de coordenadas $(0, 7)$.

Assim, $g(x) = -f(x) + 7$

Resposta **A**

**5.** Se a chamada durar um minuto, ou menos, o preço a pagar é de 12 cêntimos.

Portanto, se $t \leq 60$, o preço a pagar é de 12 cêntimos.

Se a chamada durar mais do que um minuto, o total a pagar é a soma das duas parcelas seguintes:

- 12 cêntimos (preço do primeiro minuto);
- quantia que resulta de multiplicar o número de segundos de conversação que decorrem para além do primeiro minuto $(t - 60)$ pelo preço de cada segundo (0,1 cêntimos).

Portanto, se $t > 60$, o preço a pagar é de $12 + 0{,}1\,(t-60)$ cêntimos.

Resposta **C**

# GRUPO II

**1.1.** Tem-se: $D(4,0,8) \quad F(0,\,-3,8)$

Portanto, $\overrightarrow{FD} = D - F = (4,3,0)$

Assim, uma equação vectorial da recta $DF$ é $(x,y,z) = (4,0,8) + k(4,3,0),\ k \in \mathbb{R}$

**1.2.** Tem-se $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Portanto, $\overline{AB} = 5$

A área da face $[ABED]$ é, então, $\overline{AB} \times \overline{BE} = 5 \times 8 = 40$

A face $[ACFD]$ é igual à face $[ABED]$, pelo que a sua área também é igual a $40$

A área da face $[BCFE]$ é $\overline{CB} \times \overline{BE} = 6 \times 8 = 48$

Portanto, a área lateral do prisma é $40 + 40 + 48 = 128$

**2.** No percurso de $R$ até $S$, a distância do ponto $P$ ao ponto $O$ não é constante, enquanto que, no percurso de $S$ até $T$, a distância do ponto $P$ ao ponto $O$ é constante. Portanto, a opção A está incorrecta.

A distância do ponto $P$ ao ponto $O$ nunca é igual a zero, pelo que a opção B também está incorrecta.

O ponto $P$ inicia o percurso em $R$ e termina-o em $T$. Como os pontos $R$ e $T$ estão igualmente distanciados do ponto $O$, o valor de $d$ correspondente ao instante inicial tem de ser igual ao valor de $d$ correspondente ao instante final. Assim, a opção D também está incorrecta.

Portanto, a opção correcta é a opção C.

**3.1.** Área de cada quadrado: $x^2$

Área de cada triângulo: $\dfrac{(14-2x)\,(5-x)}{2} = (7-x)(5-x) = 35 - 12x + x^2$

$A(x) = 4x^2 + 2(35 - 12x + x^2) = 6x^2 - 24x + 70$

**3.2.** Tem-se: $6x^2 - 24x + 70 = 6(x^2 - 4x) + 70 = 6(x^2 - 4x + 4) - 24 + 70 =$
$= 6(x-2)^2 + 46$

Portanto, o gráfico da função $A$ tem vértice no ponto de coordenadas $(2, 46)$.

Assim, o valor de $x$ pedido (valor para o qual a área da parte em metal é mínima) é igual a $2$, sendo a respectiva área igual a $46\ cm^2$.

**3.3.** Se a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, então a área da parte em metal é metade da área da placa.
Sendo a área da placa $140\ cm^2$, metade é $70\ cm^2$.

Trata-se, assim, de resolver a equação $A(x) = 70$

Tem-se: $6x^2 - 24x + 70 = 70 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 6\,x\,(x-4) = 0$

Como $x > 0$, tem de ser $x = 4$

**4.1.** Uma vez que $4$ é um zero do polinómio $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, podemos garantir que este polinómio é divisível por $x - 4$. Façamos a divisão, pela Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 4 & & 4 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

O quociente da divisão é $x^2 + x - 2$

Portanto, $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-4)\,(x^2 + x - 2)$

Determinemos agora os zeros do polinómio $x^2 + x - 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = 1$$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Portanto, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]1, 4[$

**4.2.** De acordo com o enunciado, comecemos por determinar a equação reduzida da recta $AB$

Como $f(-3) = -28,$ o ponto $A$ tem coordenadas $(-3, -28)$

Como $f(0) = 8,$ o ponto $B$ tem coordenadas $(0, 8)$

Tem-se, então, que: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 8) - (-3, -28) = (3, 36)$

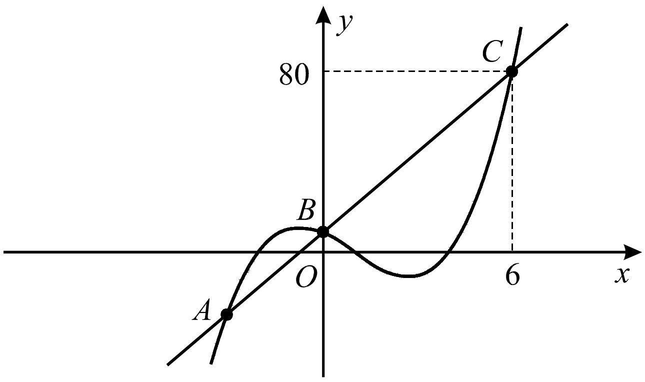
O declive da recta $AB$ é igual a $\frac{36}{3}$ , ou seja, é igual a $12$

Como o ponto $B$ tem coordenadas $(0, 8),$ a ordenada na origem da recta $AB$ é igual a $8$

A equação reduzida da recta $AB$ é, portanto, $y = 12x + 8$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, podemos visualizar o gráfico de $f$ e a recta $AB$.

Escolheu-se a janela $[-10, 10] \times [-50, 100],$ a qual permite visualizar o ponto $C,$ cujas coordenadas se podem obter utilizando a ferramenta de intersecção da calculadora.




As coordenadas do ponto $C$ são $(6, 80)$