Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 06.05.2011

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(A)**

A distância da cadeira 1 ao solo é sempre superior a zero. Tal permite excluir a opção **C**.

A distância da cadeira 1 ao solo começa por diminuir com o decorrer do tempo até atingir o mínimo, o que permite excluir a opção **B**.

A opção **D** deve ser excluída pois, de acordo com o gráfico apresentado nesta opção, ao fim de um minuto a roda não teria completado uma volta.

2. Resposta **(C)**

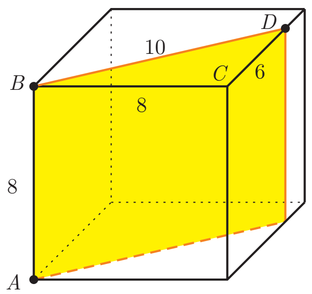
Às 15 horas desse dia, a altura, em metros, da água na piscina era $h(6) = 0{,}2 \times 6 = 1{,}2$

Portanto, o volume, em m^3, de água na piscina era igual a $10 \times 7 \times 1{,}2 = 84$

Logo, às 15 horas desse dia, havia $84\,000$ litros de água na piscina.

3. Resposta **(C)**

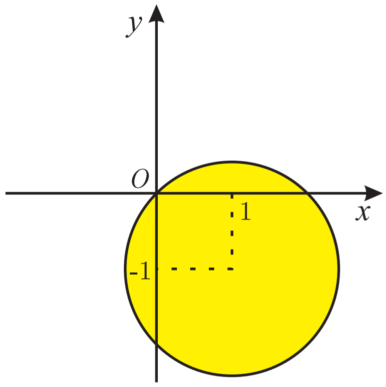
A secção produzida no cubo pelo plano ABD é o rectângulo representado na figura.



O valor da área deste rectângulo é $8 \times \sqrt{8^2 + 6^2} = 8 \times 10 = 80$

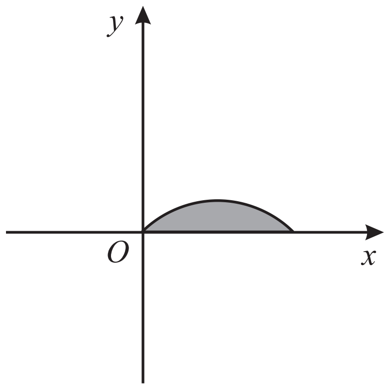
4. Resposta **(D)**

A condição $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 2$ define o círculo de centro no ponto $(1, -1)$ e raio $\sqrt{2}$



A condição $y \geq 0$ define o conjunto dos pontos de ordenada não negativa.

Na figura seguinte, apresenta-se, em referencial o.n. xOy, a intersecção das regiões definidas pelas condições $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 2$ e $y \geq 0$



5. Resposta **(B)**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Os triângulos $[IGK]$ e $[BCK]$ são semelhantes, sendo $\overline{GK} = \frac{1}{2}\,\overline{CK}$

Logo, $\overline{IG} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$, pelo que o ponto I é o ponto médio do segmento $[GF]$

De igual modo se conclui que o ponto J é o ponto médio do segmento $[GH]$

Portanto, o volume da pirâmide $[GIJK]$ é igual a $\frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 12 = \frac{432}{6} = 72$

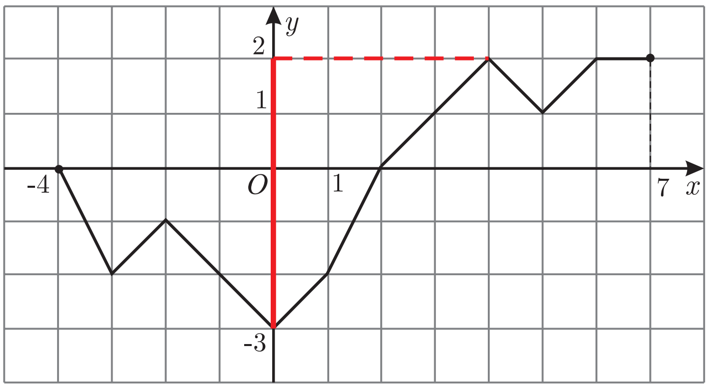
2.º Processo

Para calcular o volume da pirâmide $[GIJK]$, pode ter-se em conta que esta pirâmide é uma redução de razão $\frac{1}{2}$ da pirâmide $[CBDK]$, pelo que o seu volume é $\frac{1}{8}$ do volume desta última pirâmide.

Portanto, como o volume da pirâmide $[CBDK]$ é igual a $\frac{1}{3}\times\frac{12\times 12}{2}\times 24 = 576$, o volume da pirâmide $[GIJK]$ é igual a $\frac{1}{8}\times 576 = 72$

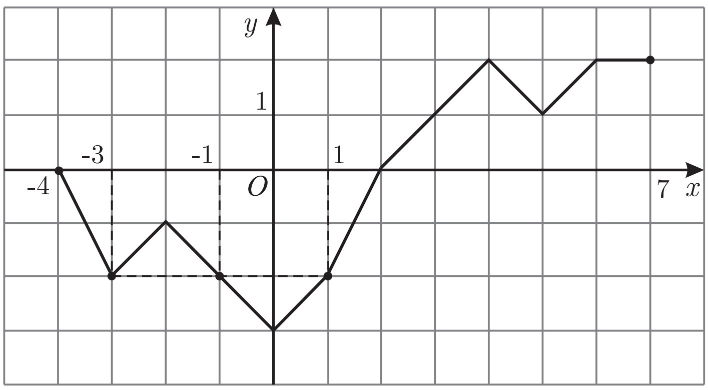
GRUPO II

1.1. Na figura, está representado o gráfico da função f



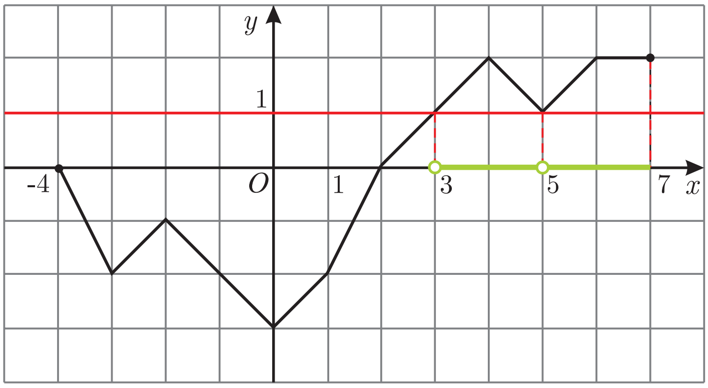
Como se pode observar, o contradomínio (conjunto das imagens) da função f é o conjunto $[-3, 2]$

1.2. Na figura, está representado o gráfico da função f e estão assinalados os pontos do gráfico que têm ordenada -2. As abcissas desses pontos são os números -3, -1 e 1



Portanto, os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a -2, são -3, -1 e 1

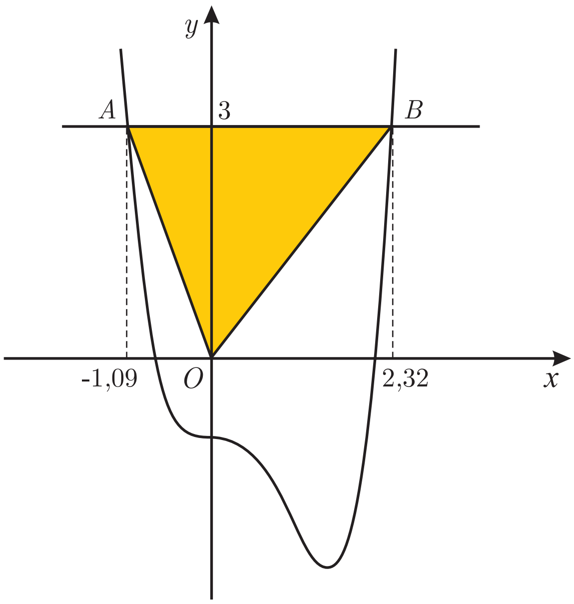
1.3. Na figura, está representado o gráfico da função f , bem como a recta de equação $y = 1$



Da análise do gráfico, conclui-se que o conjunto solução da condição $f(x) > 1$ é $]3,5[\cup]5,7]$

2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, e escolhendo uma janela conveniente, podemos visualizar os pontos A e B, pontos de intersecção do gráfico de g com a recta de equação $y = 3$. Utilizando, por exemplo, a ferramenta de intersecção da calculadora, podemos obter a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B

Na figura seguinte, está reproduzida a parte do gráfico da função g visualizada na calculadora, está representado o triângulo $[AOB]$ e estão indicadas as abcissas dos pontos A e B, arredondadas às centésimas.



A área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\dfrac{\overline{AB}\times 3}{2}$

Tem-se $\dfrac{\overline{AB}\times 3}{2} \approx \dfrac{(2{,}32+1{,}09)\times 3}{2} = 5{,}115$

Portanto, a área do triângulo $[AOB]$, arredondada às décimas, é igual a $5{,}1$

3.1. O comprimento do lado do rectângulo contido no eixo Ox é dado, em função de x, por $5-x$

O ponto P tem abcissa x e, como este ponto pertence à recta de equação $y=2x-2$, a sua ordenada é $2x-2$

Portanto, a área do rectângulo é dada, em função de x, por

$S(x)=(5-x)(2x-2)=10x-10-2x^2+2x=-2x^2+12x-10$

3.2. Uma condição que traduz o problema é $-2x^2+12x-10<6 \ \wedge \ x\in\,]1,5[$

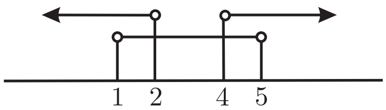
Tem-se: $-2x^2+12x-10<6 \iff -2x^2+12x-16<0$

Ora, $-2x^2+12x-16=0 \iff x=2 \ \vee \ x=4$

Portanto, $-2x^2+12x-16<0 \iff x<2 \ \vee \ x>4$

Como $x\in\,]1,5[$, o conjunto solução da condição que traduz o problema é

$\left(]-\infty,2[\, \cup\,]4,+\infty[\right)\cap\,]1,5[$



Portanto, o conjunto dos valores de x para os quais a área do rectângulo é inferior a 6 é $]1,2[\, \cup\,]4,5[$

4.1. Tem-se $C=D+\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{FG}=G-F=(11,-1,2)-(5,-3,5)=(6,2,-3)$

Portanto, $C=D+\overrightarrow{FG}=(6,9,15)+(6,2,-3)=(12,11,12)$

4.2. O raio da superfície esférica é a distância do ponto F ao ponto G

$r=\overline{FG}=\|\overrightarrow{FG}\|=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=\sqrt{49}=7$

Uma equação da superfície esférica é, portanto, $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=49$

4.3. A recta que passa no ponto $D(6,9,15)$ e é paralela ao eixo Ox pode ser definida pela condição $y=9\wedge z=15$ ou pela condição $(x,y,z)=(6,9,15)+k(1,0,0),\ k\in\mathbb{R}$

5. Designando por a a altura de um dos cones, a altura do outro cone é $h - a$

Designemos por C_1 o cone de altura a e por C_2 o cone de altura $h - a$

Tem-se:

Volume do cone $C_1 = \frac{\pi r^2 a}{3}$

Volume do cone $C_2 = \frac{\pi r^2 (h-a)}{3}$

A soma dos volumes dos dois cones é igual a

$$\frac{\pi r^2 a}{3} + \frac{\pi r^2 (h-a)}{3} = \frac{\pi r^2 a + \pi r^2 (h-a)}{3} = \frac{\pi r^2 a + \pi r^2 h - \pi r^2 a}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Portanto, a soma dos volumes dos dois cones não depende de a, pelo que não depende da posição do ponto P