TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA B

10.º ANO

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1.

Apresentamos dois exemplos de resposta.

1.º Exemplo:

O hexágono regular [*ABCDEF*] está dividido em seis triângulos equiláteros, geometricamente iguais (congruentes). Os triângulos [*EFO*], [*FAO*] e [*ABO*] são três desses triângulos e, assim, cada um dos ângulos *EOF*, *FOA* e *AOB* mede 60º , pelo que cada um dos ângulos *EOA* e *FOB* mede 120º. Logo, a rotação de centro no ponto *O* e de 120º de amplitude transforma o vértice *E* no vértice *A* e transforma o vértice *F* no vértice *B*.

Por conseguinte, a rotação de centro no ponto *O* e de 120º de amplitude transforma o triângulo [*EFO*] no triângulo [*ABO*].

2.º Exemplo:

O hexágono regular [*ABCDEF*] está dividido em seis triângulos equiláteros, geometricamente iguais (congruentes). Os triângulos [*EFO*], [*DEO*], [*CDO*], [*BCO*] e [*ABO*] são cinco desses triângulos e, assim, cada um dos ângulos *FOE*, *EOD*, *DOC*, *COB* e *BOA* mede 60º. Cada um dos ângulos *GOE* e *BOH* mede 30º, pelo facto de *G* e de *H* serem pontos médios de lados de triângulos equiláteros, pelo que, cada um dos ângulos côncavos *EOA* e *FOB* mede 240º. Por consequência, o ângulo côncavo *GOH* mede 240º. Logo, a rotação de centro no ponto *O* e de - 240º de amplitude transforma $[OG]$ em $[OH]$.

Por conseguinte, a rotação de centro no ponto *O* e de -240º de amplitude transforma o triângulo [*EFO*] no triângulo [*ABO*].

1.2.

Apresentamos dois exemplos de resposta.

1.º Exemplo:

A área da parte representada com sombreado é igual à área da parte representada sem sombreado no hexágono [*ABCDEF*].

Como a área do hexágono é o sextuplo da área do triângulo [*EFO*], resulta que a área da parte representada a sombreado é igual ao triplo da área do triângulo [*EFO*] .

Calculemos, então, a área do triângulo [*EFO*]:

Temos $\acute{A}rea\left(\Delta EFO\right)=\dfrac{\overline{EF}\times\overline{OG}}{2}$ e $\overline{OG}=12$, de modo que resulta $\acute{A}rea\left(\Delta EFO\right)=\dfrac{\overline{EF}\times 12}{2}=6\,\overline{EF}$.

Podemos calcular $\overline{EF}$ por aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [*GFO*]: obtemos $\overline{OF}^2=\overline{OG}^2+\overline{GF}^2$. Notando que $\overline{OF}=\overline{EF}$, por causa do triângulo [*EFO*] ser equilátero, e, notando também que $\overline{GF}=\dfrac{\overline{EF}}{2}$, por causa de *G* ser o ponto médio de [*EF*], resulta $\overline{OF}^2=\overline{OG}^2+\overline{GF}^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2=12^2+\left(\dfrac{\overline{EF}}{2}\right)^2$. Resolvendo esta equação, obtemos:

$$\overline{EF}^2=12^2+\left(\frac{\overline{EF}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2=144+\frac{\overline{EF}^2}{4} \Leftrightarrow 4\overline{EF}^2=576+\overline{EF}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\,\overline{EF}^2-\overline{EF}^2=576 \Leftrightarrow 3\,\overline{EF}^2=576 \Leftrightarrow \overline{EF}^2=\frac{576}{3} \Leftrightarrow \overline{EF}^2=192 \Leftrightarrow \overline{EF}=\sqrt{192}\,.$$

Assim, concluímos que $\acute{A}rea\left(\Delta EFO\right)=6\,\overline{EF}=6\,\sqrt{192}$.

Portanto, a área da parte representada a sombreado é tal que $3\times 6\,\sqrt{192}=18\sqrt{192}$.

O valor da área pedida, arredondado às décimas, é 249,4 m^2 .

2.º Exemplo:

A área da parte representada com sombreado é igual à área da parte representada sem sombreado no hexágono [*ABCDEF*].

Assim, a área da parte representada a sombreado é igual a metade da área do hexágono regular [*ABCDEF*].

Calculemos a área desse hexágono.Temos, de acordo com o formulário:

$$\text{Área do hexágono} = \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}\,.$$

Ora, $\text{Apótema} = \overline{OG} = 12$. Além disso, $\text{Semiperímetro} = \dfrac{\text{Perímetro}}{2} = \dfrac{6\overline{EF}}{2} = 3\,\overline{EF}$.

Por consequência, vem $\text{Área do hexágono} = 3\,\overline{EF} \times 12 = 36\,\overline{EF}$.

Podemos calcular $\overline{EF}$ tal como está efectuado no processo anterior e, portanto, obter

$\text{Área do hexágono} = 36\,\sqrt{192}$.

A área da parte representada a sombreado é tal que $\dfrac{36\,\sqrt{192}}{2} = 18\sqrt{192}$.

O valor da área pedida, arredondado às décimas, é 249,4 m^2.

2.

Apresentamos três exemplos de resposta.

1.º Exemplo:

O triângulo [*OAB*] é equilátero e a base $[OA]$ está contida no eixo das abcissas, pois o vértice *A* pertence ao semi-eixo positivo das abcissas. Como a abcissa do vértice *B* é $2\sqrt{3}$, resulta que a abcissa do vértice *A* é $4\sqrt{3}$, porque o ponto de coordenadas $\left(2\sqrt{3},\, 0\right)$ é o ponto médio de $[OA]$. O vértice D é o ponto simétrico do vértice A, relativamente à origem do referencial, porque O é o centro do hexágono. Logo, a abcissa do vértice D é $-4\sqrt{3}$.

2.º Exemplo:

O vértice C é o ponto simétrico de B, relativamente ao eixo das ordenadas, porque o centro do hexágono regular [*ABCDEF*] é a origem do referencial e o vértice A pertence ao semi-eixo positivo das abcissas. Assim, a abcissa do vértice B , $2\sqrt{3}$, é igual a metade do lado do hexágono. Portanto, o lado do hexágono é igual a $4\sqrt{3}$. Como o triângulo [*CDO*] é equilátero e D é um ponto do eixo das abcissas, então a sua abcissa é $-4\sqrt{3}$.

3.º Exemplo:

Tem-se $\overline{OD} = \overline{OB}$, porque O é o centro do hexágono regular [*ABCDEF*]. Como o vértice A pertence ao semi-eixo positivo das abcissas, resulta que o ponto médio de $[CB]$ é um ponto do eixo das ordenadas. Designando esse ponto por P , resulta que, no triângulo rectângulo [*BOP*] , pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PB}^2$.

Portanto, $\overline{OB}^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 36 + 2^2 \times \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 36 + 4 \times 3 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 48 \Leftrightarrow \overline{OB} = \sqrt{48}$.

Como D é um ponto do eixo das abcissas, a sua abcissa é $-\sqrt{48}$.

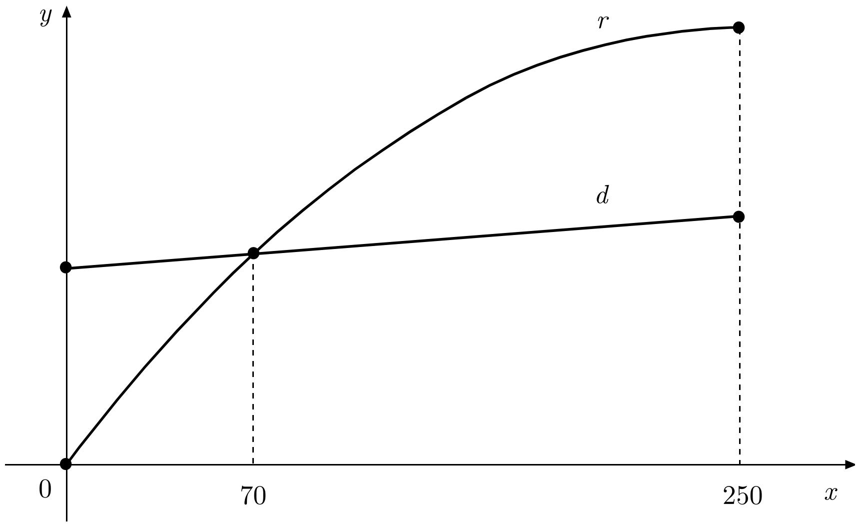
GRUPO II

1.

Apresentamos dois exemplos de resposta.

1.º Exemplo:

Comecemos por esboçar os gráficos das funções r e d, em $[0, 250]$:

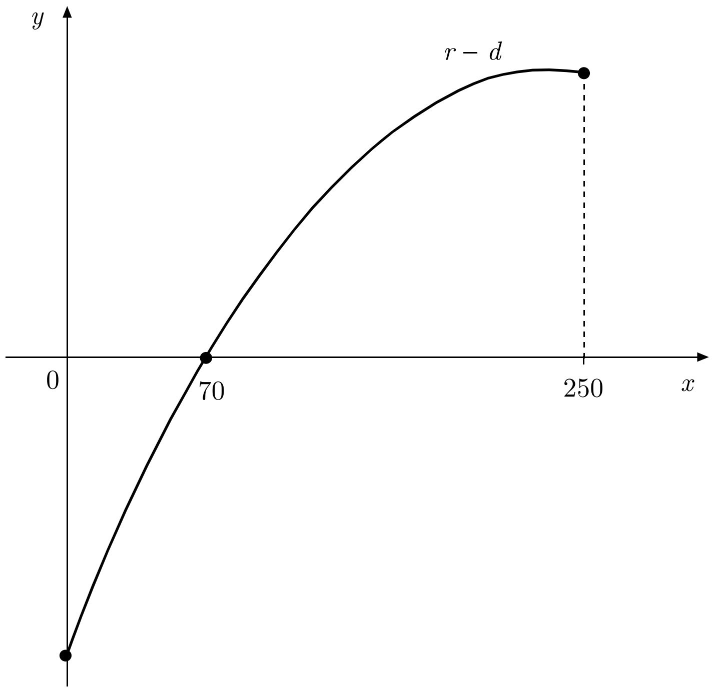


Assinalámos na figura o ponto de intersecção dos dois gráficos e indicámos o valor da sua abcissa: 70.

O gráfico da função r está abaixo do gráfico da função d no intervalo $[0\,,70[$. Concluímos, assim, que os valores, em milhares de litros, para os quais a receita obtida com a produção de vinho é inferior à despesa com essa produção, são os do intervalo $[0\,,70[$.

2.º Exemplo:

Consideremos a função definida por $r(x) - d(x)$ e representemo-la graficamente, em $[0, 250]$:



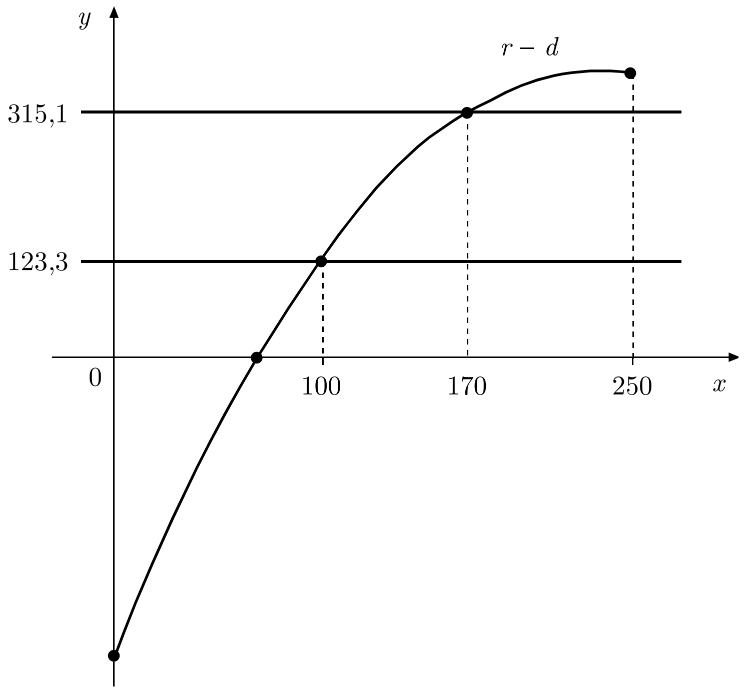
Assinalámos na figura o ponto correspondente ao zero da função $r - d$ e indicámos o seu valor: 70.

À esquerda do zero da função, ou seja, no intervalo $[0,70[$, temos $r(x) - d(x) < 0$, ou seja, $r(x) < d(x)$, pelo que, os valores, em milhares de litros, para os quais a receita obtida com a produção de vinho é inferior à despesa com essa produção, são os do intervalo $[0\ ,70[$.

2. O lucro da empresa é dado, em função de x, por

$$r(x) - d(x) = -0{,}0137\,x^2 + 6{,}85\,x - \left(0{,}411\,x + 383{,}6\right) = -\,0{,}0137\,x^2 + 6{,}439\,x - 383{,}6$$

Façamos um esboço do gráfico da função $r - d$, em $[0, 250]$, e das rectas de equações $y = 123{,}3$ e $y = 315{,}1$.



A abcissa do ponto de intersecção do gráfico de $r - d$ com a recta de equação $y = 123{,}3$ é 100 e a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de $r - d$ com a recta de equação $y = 315{,}1$ é 170.

Concluímos, assim, que a quantidade de vinho a produzir deverá estar compreendida entre 100 milhares de litros e 170 milhares de litros.

GRUPO III

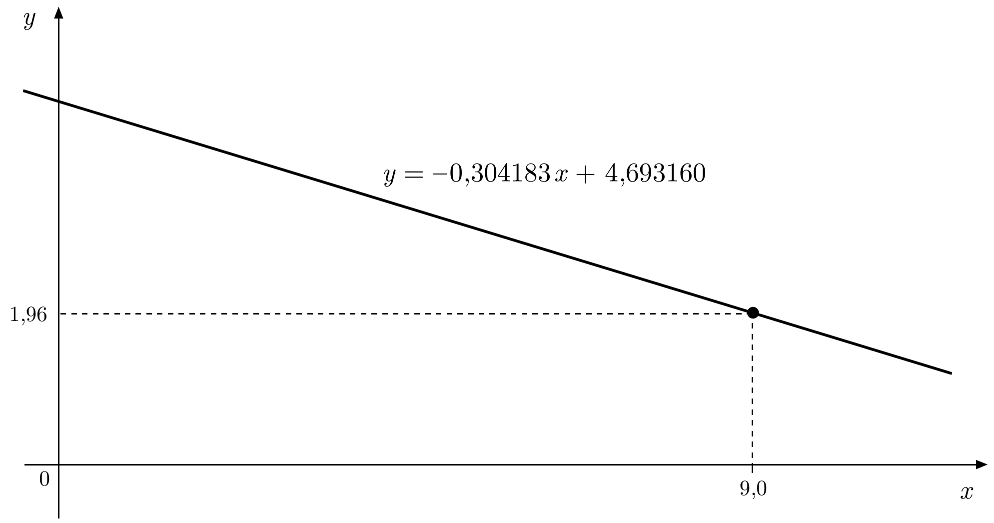
1.

Registando, na calculadora gráfica, os valores referentes a x na *lista 1* e os valores referentes a y na *lista 2*, podemos obter, como valores aproximados do declive e da ordenada na origem referentes à recta de regressão linear de y sobre x, respectivamente, $-0{,}304183$ e $4{,}693160$. Temos, então $y = -0{,}304183\,x + 4{,}693160$.

Para obter o valor pedido, podemos substituir, na equação anterior, x por $9{,}0$:

$$y = -0{,}304183 \times 9{,}0 + 4{,}693160 \approx 1{,}96$$

Ou, em alternativa, podemos recorrer a uma resolução gráfica.



A imagem de $9{,}0$ é o valor pedido: 1,96.

Em conclusão, a estimativa para o preço de cada litro de vinho tinto em 1954 é 1,96 escudos.

2.

Da leitura dos valores dos pares I e II , constatamos que as médias são aproximadamente iguais e que o valor do desvio padrão do par II é menor do que o valor do desvio padrão do par I .

Comparando os dois histogramas relativamente à concentração dos valores dos preços das garrafas vendidas em torno das respectivas médias, verificamos que há maior concentração no Supermercado A do que no Supermercado B.

Como a um menor desvio padrão corresponde uma maior concentração (ou uma menor dispersão) dos dados relativamente à média, podemos concluir que o par correspondente aos dados recolhidos no Supermercado A é o par II .