TESTE INTERMÉDIO - 11.º ANO - MATEMÁTICA A

19 de Maio de 2006

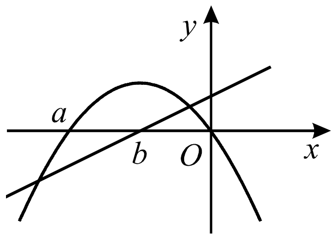
RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. No percurso de B para C, a distância do ponto P ao ponto A vai aumentando.
No percurso de C para D, a distância do ponto P ao ponto A vai diminuindo.
Passado o ponto D, a distância do ponto P ao ponto A nunca deixa de aumentar.
Portanto, a função em causa começa por ser crescente, depois decresce, para, em seguida, ser novamente crescente.

Resposta **A**

2. Um dos zeros da função quadrática f é 0.
Designemos por a o outro zero desta função.
Designemos por b o zero da função afim g.



Podemos elaborar o seguinte quadro:

x	$-\infty$	a		b		0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

n.d. - não definida

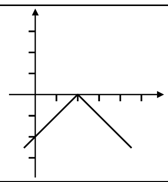
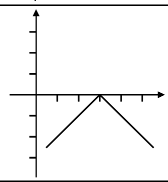
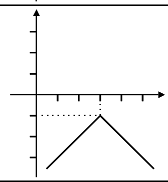
Do quadro resulta que o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ é

$[a\,, b[\, \cup\, [0\,, +\infty[$

Como só a alternativa **D** tem esta forma, concluímos ser esta a resposta correcta (sendo $a = -4$ e $b = -2$).

Resposta **D**

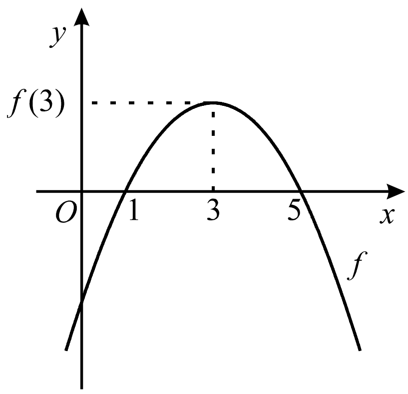
3. O gráfico da função g pode obter-se a partir do gráfico da função f por meio da seguinte composição de transformações:

Transformação	Novo Gráfico	Expressão da nova função
Simetria em relação ao eixo das abcissas.		$-f(x)$
Translacção associada ao vector $(1, 0)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para a direita.		$-f(x-1)$
Translacção associada ao vector $(0, -1)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para baixo.		$-f(x-1)-1$

Portanto, $g(x) = -f(x-1)-1$

Resposta **D**

4. Atendendo a que o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1\,,5]$, podemos concluir que os zeros de f são 1 e 5 e que o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

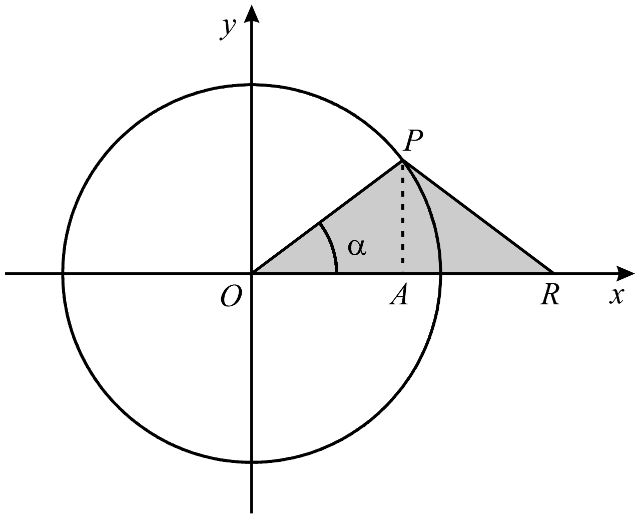


A abcissa do vértice da parábola é $\dfrac{1+5}{2} = 3.$

Deste modo, o contradomínio de f é o intervalo $]-\infty\,,\,f(3)]$.

Resposta **D**

5. Designemos por A o ponto médio do segmento $[OR]$.



Como o triângulo $[OPR]$ é isósceles, o segmento $[AP]$ é a altura relativa à base $[OR]$.

Tem-se que $\overline{OA} = cos\,\alpha$, pelo que $\overline{OR} = 2\,cos\,\alpha$.

Por outro lado, $\overline{AP} = sen\,\alpha$

Área do triângulo $[OPR] = \dfrac{base \times altura}{2} =$

$$= \frac{\overline{OR} \times \overline{AP}}{2} = \frac{2 \times cos\,\alpha \times sen\,\alpha}{2} = cos\,\alpha \times sen\,\alpha$$

Resposta **A**

6. Como $cos\,\alpha < 0$ e $tg\,\alpha > 0$ podemos concluir que o ângulo α pertence ao 3º quadrante. Neste quadrante, tem-se que $sen\,\alpha < 0$.

Atendendo a que $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ vem $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha$

Como $sen\,\alpha < 0$, vem $sen\,\alpha = -\sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$

Resposta **B**

7. Dado que β é uma solução da equação $sen\,x = \dfrac{1}{5}$, tem-se $sen\,\beta = \dfrac{1}{5}$

Portanto, $cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) = -\,sen\,\beta = -\,\dfrac{1}{5}$

Conclui-se assim que $\dfrac{\pi}{2} + \beta$ é uma solução da equação $cos\,x = -\,\dfrac{1}{5}$

Resposta **B**

Grupo II

1.1. $f(x) \leq -1 \;\Leftrightarrow\; 2 + \frac{1}{1-x} \leq -1 \;\Leftrightarrow\; 3 + \frac{1}{1-x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4-3\,x}{1-x} \leq 0$

x	$-\infty$	1		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$4-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{4-3x}{1-x}$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

n.d. - não definida

Por observação do quadro, conclui-se que o conjunto pedido é $\left]1\,,\,\frac{4}{3}\right]$

1.2. O gráfico da função f tem uma assimptota vertical cuja equação é $x = 1$ e uma assimptota horizontal cuja equação é $y = 2$

2. Designemos por x o número de hectares de trigo e por y o número de hectares de milho.

Função objectivo: $L = 600\,x + 500\,y$

Restrições:

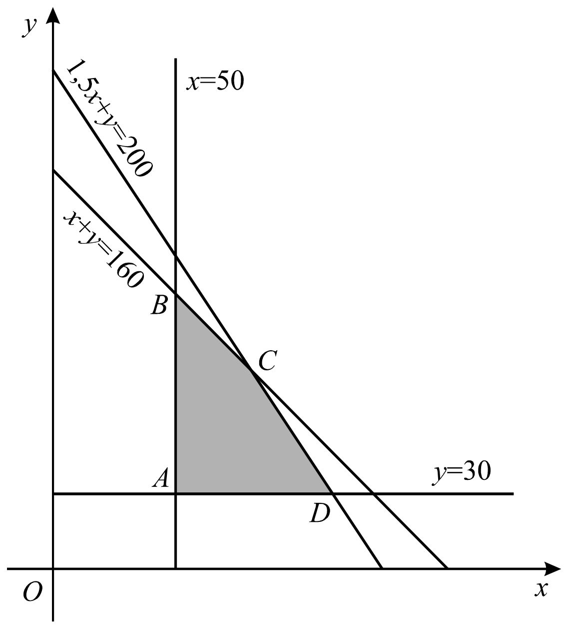
$x + y \leq 160$

$x \geq 50$

$y \geq 30$

$1\,500\,x + 1\,000\,y \leq 200\,000$ (equivalente a $1{,}5\,x + y \leq 200$)

A intersecção dos semiplanos definidos pelas inequações que exprimem as restrições é a região admissível. Graficamente, temos

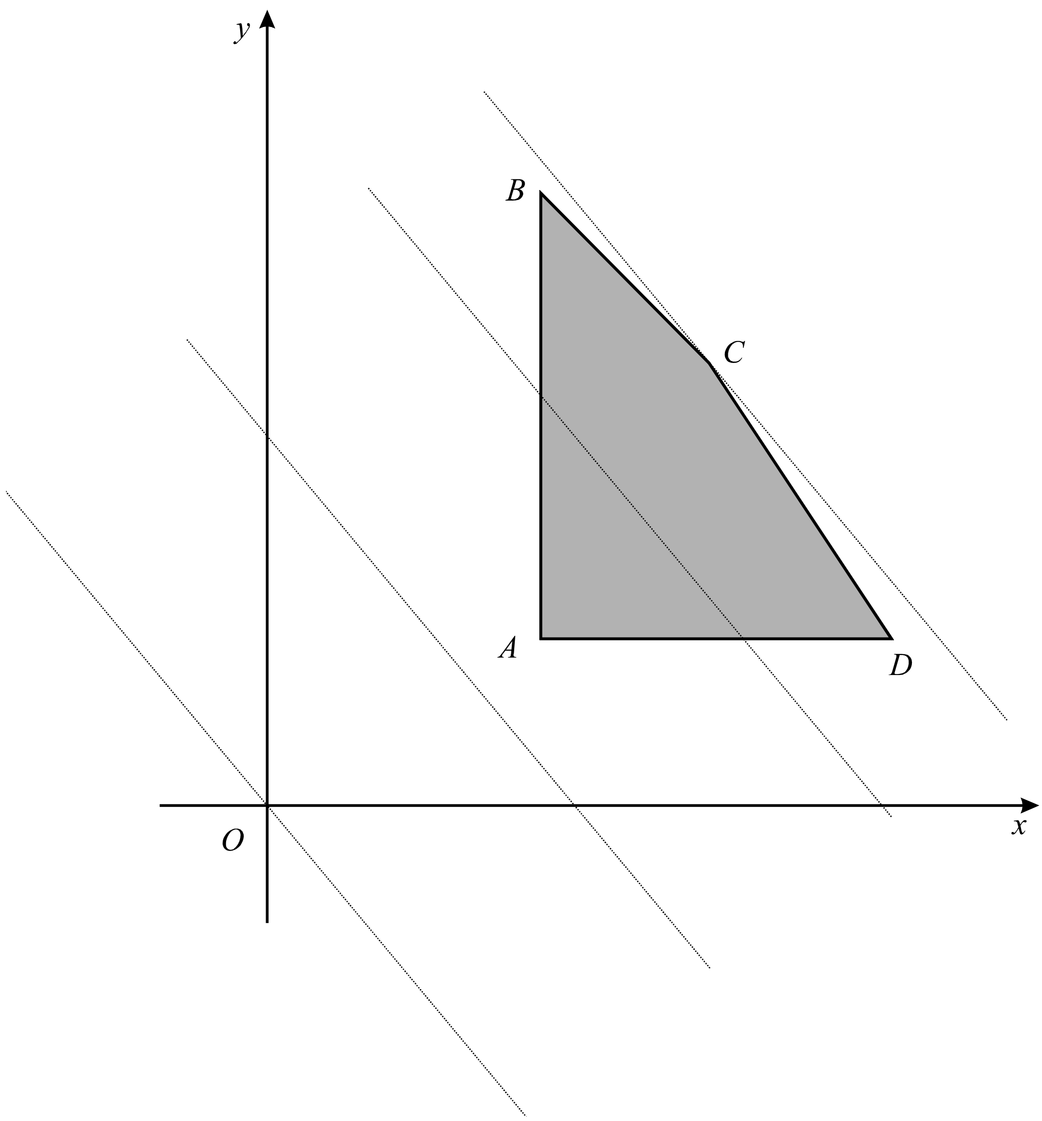


A região admissível tem quatro vértices: A, B, C e D.

Tem-se que:

Vértice	Intersecção das rectas de equações	Coordenadas
A	$x = 50$ e $y = 30$	$(50, 30)$
B	$x = 50$ e $x + y = 160$	$(50, 110)$
C	$x + y = 160$ e $1{,}5\,x + y = 200$	$(80, 80)$
D	$y = 30$ e $1{,}5\,x + y = 200$	$(340/3, 30)$

Como a função objectivo é $L = 600\,x + 500\,y$, vamos traçar a recta de equação $600\,x + 500\,y = 0$ e vamos deslocá-la paralelamente a si própria.



Constata-se que a solução óptima é atingida no vértice $C(80, 80)$.

Em alternativa, podemos calcular o valor da função objectivo nos vértices (dado que a função objectivo tem o seu valor máximo num vértice da região admissível).

Vértice	x	y	$600x + 500y$	L
A	50	30	$600 \times 50 + 500 \times 30$	$45\,000$
B	50	110	$600 \times 50 + 500 \times 110$	$85\,000$
C	80	80	$600 \times 80 + 500 \times 80$	$88\,000$
D	$340/3$	30	$600 \times 340/3 + 500 \times 30$	$83\,000$

Observando os valores da tabela, concluímos que a solução óptima é atingida no vértice $(80, 80)$.

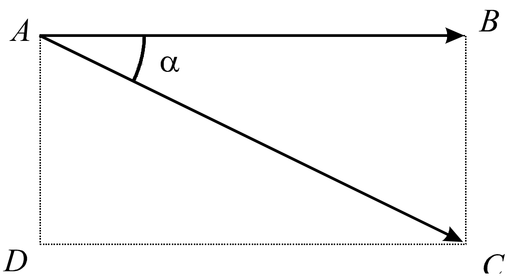
Portanto, para maximizar o lucro, o agricultor deve semear 80 hectares de trigo e 80 hectares de milho.

3. Tem-se que $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \,.\, \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) =$

$$= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 0 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \overline{AB}^{\,2}$$

Em alternativa, apresenta-se a seguinte resolução:

Seja α o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$



Tem-se que $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| cos\,\alpha$

Atendendo a que $cos\,\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e a que

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \overline{AB}$ e $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \overline{AC}$, vem

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{AB} \times \overline{AB} = \overline{AB}^{\,2}$$

4.1.

Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes contidas no plano. Portanto, uma recta é perpendicular a um plano se um vector director da recta for perpendicular a dois vectores não colineares do plano.

Consideremos então um vector director da recta dada e verifiquemos que esse vector é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$.

Como a recta é definida pela condição $x = 0 \ \wedge \ y = 2\,z$, tem-se que os pontos $(0,0,0)$ e $(0,2,1)$ pertencem à recta, pelo que o vector

$$\overrightarrow{u} = (0,2,1) - (0,0,0) = (0,2,1)$$

é um vector director da recta.

Por outro lado, como $[RSTU]$ é um quadrado de área igual a 4, tem-se que $\overline{ST} = 2$, pelo que as coordenadas de S e de T são, respectivamente, $(1,1,0)$ e $(-1,1,0)$.

Portanto,

$$\overrightarrow{ST} = T - S = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$$

$$\overrightarrow{SV} = V - S = (0,0,2) - (1,1,0) = (-1,-1,2)$$

Vejamos então se o vector $\overrightarrow{u}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$. Tem-se:

$$\overrightarrow{u} \, . \, \overrightarrow{ST} = (0,2,1) . (-2,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\overrightarrow{u} \, . \, \overrightarrow{SV} = (0,2,1) . (-1,-1,2) = 0 - 2 + 2 = 0$$

Concluímos que o vector $\overrightarrow{u}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$, pelo que a recta dada é perpendicular ao plano STV.

<u>Equação do plano</u>

Um vector normal ao plano: $\overrightarrow{u} = (0,2,1)$

Um ponto do plano: $(1,1,0)$

Uma equação do plano: $0\,(x-1) + 2(y-1) + 1(z-0) = 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ 2\,y - 2 + z = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\,y + z = 2$

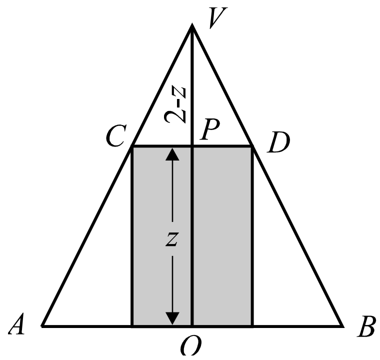
4.2.1.

O ponto P desloca-se ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V. Sendo assim, a cota do ponto P varia entre a cota do ponto O, que é 0, e a cota do ponto V, que é 2.

O domínio da função f é, portanto, o intervalo $]\,0, 2\,[$.

Com vista a determinar uma expressão que defina a função f, comecemos por determinar o raio r do cilindro, em função de z.

Na figura está representada a secção, da pirâmide e do cilindro, obtida pela intersecção destes com o plano yOz.



De acordo com este esquema, e atendendo a que os triângulos $[VPD]$ e $[VOB]$ são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{VP}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{2-z}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2-z}{2}$$

O volume do cilindro, em função de z, será, então

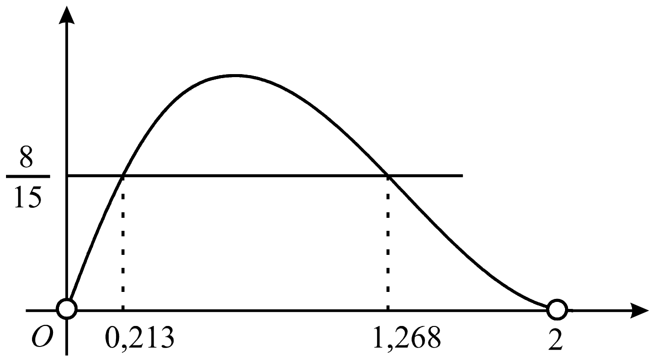
$$\begin{aligned} f(z) &= A_{base} \times altura = \\ &= \pi \times r^2 \times z = \\ &= \pi \times \left(\frac{2-z}{2}\right)^2 \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^2 - 4z + 4}{4} \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^3 - 4z^2 + 4z}{4} = \pi\left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z\right) \end{aligned}$$

4.2.2.

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \times altura}{3} = \frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$f(z) > \frac{1}{5} \times \frac{8}{3} \Leftrightarrow f(z) > \frac{8}{15}$$

Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $f(z) > \frac{8}{15}$, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função f e a recta de equação $y = \frac{8}{15}$



Da observação do gráfico, podemos concluir que a cota do ponto P deve variar entre 0,213 e 1,268.