TESTE INTERMÉDIO - 11.º ANO - MATEMÁTICA A

19 de Maio de 2006

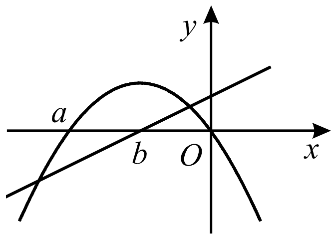
RESOLUÇÃO - VERSÃO 4

Grupo I

1. No percurso de A para B, a distância do ponto P ao ponto A vai aumentando.
No percurso de B para C, a distância do ponto P ao ponto A vai diminuindo.
Passado o ponto C, a distância do ponto P ao ponto A nunca deixa de aumentar.
Portanto, a função em causa começa por ser crescente, depois decresce, para, em seguida, ser novamente crescente.

Resposta **B**

2. Um dos zeros da função quadrática g é 0.
Designemos por a o outro zero desta função.
Designemos por b o zero da função afim f.



Podemos elaborar o seguinte quadro:

x	$-\infty$	a		b		0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

n.d. - não definida

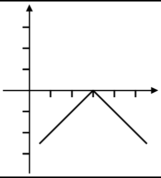
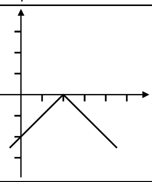
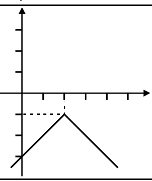
Do quadro resulta que o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ é

$]-\infty, a[\ \cup\ [b, 0[$

Como só a alternativa **A** tem esta forma, concluímos ser esta a resposta correcta (sendo $a = -4$ e $b = -2$).

Resposta **A**

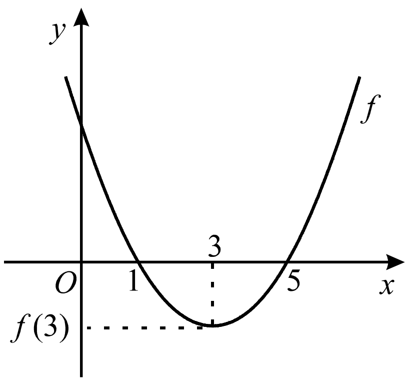
3. O gráfico da função g pode obter-se a partir do gráfico da função f por meio da seguinte composição de transformações:

Transformação	Novo Gráfico	Expressão da nova função
Simetria em relação ao eixo das abcissas.		$-f(x)$
Translacção associada ao vector $(-1, 0)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para a esquerda.		$-f(x+1)$
Translacção associada ao vector $(0, -1)$, ou seja, deslocamento de uma unidade, para baixo.		$-f(x+1)-1$

Portanto, $g(x) = -f(x+1) - 1$

Resposta **A**

4. Atendendo a que o conjunto solução da inequação $f(x) \leq 0$ é o intervalo $[1, 5]$, podemos concluir que os zeros de f são 1 e 5 e que o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

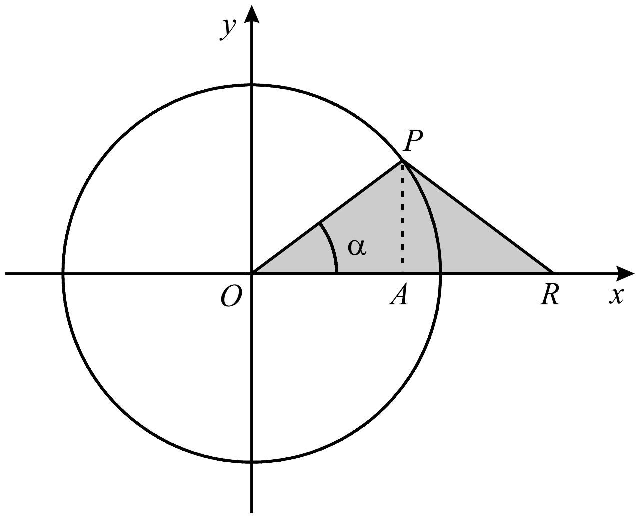


A abcissa do vértice da parábola é $\dfrac{1+5}{2} = 3.$

Deste modo, o contradomínio de f é o intervalo $[f(3), +\infty[$.

Resposta **C**

5. Designemos por A o ponto médio do segmento $[OR]$.



Como o triângulo $[OPR]$ é isósceles, o segmento $[AP]$ é a altura relativa à base $[OR]$.

Tem-se que $\overline{OA} = cos\,\alpha$, pelo que $\overline{OR} = 2\,cos\,\alpha$.

Por outro lado, $\overline{OP} = \overline{PR} = 1$

Perímetro do triângulo $[OPR] = 1 + 1 + 2\,cos\,\alpha = 2 + 2\,cos\,\alpha = 2\,(1 + \cos\alpha)$

Resposta **B**

6. Como $sen\,\alpha < 0$ e $tg\,\alpha > 0$ podemos concluir que o ângulo α pertence ao 3º quadrante. Neste quadrante, tem-se que $cos\,\alpha < 0$.

Atendendo a que $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ vem $cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha$

Como $cos\,\alpha < 0$, vem $cos\,\alpha = -\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}$

Resposta **D**

7. Dado que β é uma solução da equação $sen\,x = \frac{1}{5}$, tem-se $sen\,\beta = \frac{1}{5}$

Portanto, $cos\,(\frac{\pi}{2} - \beta) = sen\,\beta = \frac{1}{5}$

Conclui-se assim que $\frac{\pi}{2} - \beta$ é uma solução da equação $cos\,x = \frac{1}{5}$

Resposta **D**

Grupo II

1.1. $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{2-x} \leq -1 \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9-4x}{2-x} \leq 0$

x	$-\infty$	2		$\frac{9}{4}$	$+\infty$
$9-4x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{9-4x}{2-x}$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

n.d. - não definida

Por observação do quadro, conclui-se que o conjunto pedido é $\left]2, \frac{9}{4}\right]$

1.2. O gráfico da função f tem uma assimptota vertical cuja equação é $x = 2$ e uma assimptota horizontal cuja equação é $y = 3$

2. Designemos por x o número de hectares de trigo e por y o número de hectares de milho.

Função objectivo: $L = 600\,x + 500\,y$

Restrições:

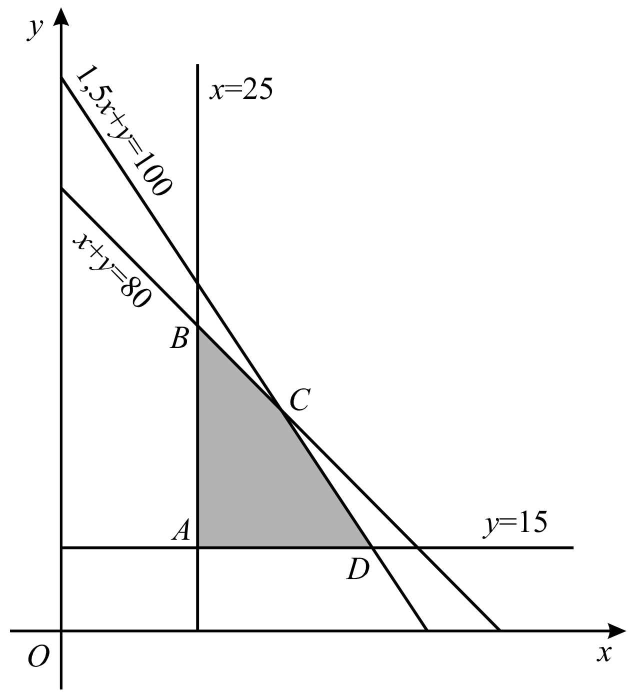
$x + y \leq 80$

$x \geq 25$

$y \geq 15$

$1\,500\,x + 1\,000\,y \leq 100\,000$ (equivalente a $1{,}5\,x + y \leq 100$)

A intersecção dos semiplanos definidos pelas inequações que exprimem as restrições é a região admissível. Graficamente, temos

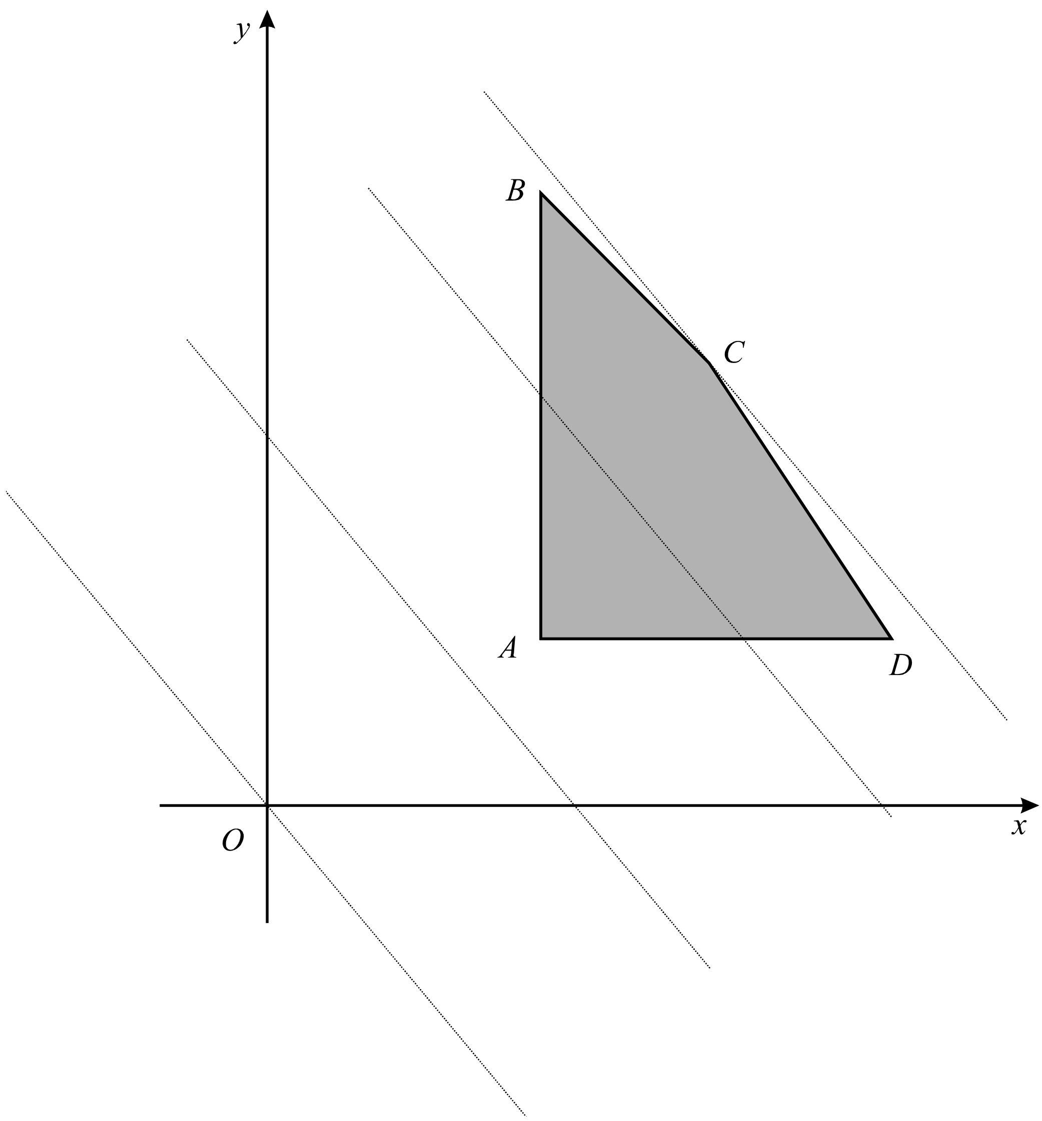


A região admissível tem quatro vértices: $A,\ B,\ C$ e D.

Tem-se que:

Vértice	**Intersecção das rectas de equações**	**Coordenadas**
A	$x = 25$ e $y = 15$	$(25, 15)$
B	$x = 25$ e $x + y = 80$	$(25, 55)$
C	$x + y = 80$ e $1{,}5\,x + y = 100$	$(40, 40)$
D	$y = 15$ e $1{,}5\,x + y = 100$	$(170/3, 15)$

Como a função objectivo é $L = 600\,x + 500\,y$, vamos traçar a recta de equação $600\,x + 500\,y = 0$ e vamos deslocá-la paralelamente a si própria.



Constata-se que a solução óptima é atingida no vértice $C(40, 40)$.

Em alternativa, podemos calcular o valor da função objectivo nos vértices (dado que a função objectivo tem o seu valor máximo num vértice da região admissível).

Vértice	x	y	$600x + 500y$	L
A	25	15	$600 \times 25 + 500 \times 15$	$22\,500$
B	25	55	$600 \times 25 + 500 \times 55$	$42\,500$
C	40	40	$600 \times 40 + 500 \times 40$	$44\,000$
D	$170/3$	15	$600 \times 170/3 + 500 \times 15$	$41\,500$

Observando os valores da tabela, concluímos que a solução óptima é atingida no vértice $(40, 40)$.

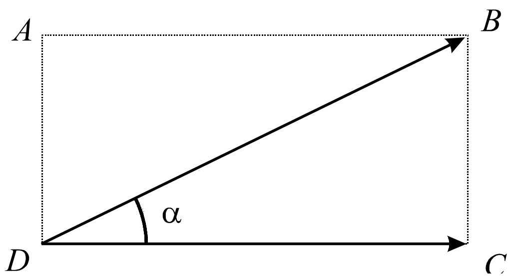
Portanto, para maximizar o lucro, o agricultor deve semear 40 hectares de trigo e 40 hectares de milho.

3. Tem-se que $\overrightarrow{DB} \,.\, \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right).\, \overrightarrow{DC} =$

$$= \overrightarrow{DA} \,.\, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \,.\, \overrightarrow{DC} = 0 + \left\|\overrightarrow{DC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|^2 = \overline{DC}^{\,2}$$

Em alternativa, apresenta-se a seguinte resolução:

Seja α o ângulo dos vectores $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$



Tem-se que $\overrightarrow{DB} \,.\, \overrightarrow{DC} = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \left\|\overrightarrow{DC}\right\| \cos\alpha$

Atendendo a que $\cos\alpha = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$ e a que

$\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \overline{DB}$ e $\left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \overline{DC}$, vem

$$\overrightarrow{DB} \,.\, \overrightarrow{DC} = \overline{DB} \times \overline{DC} \times \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \overline{DC} \times \overline{DC} = \overline{DC}^{\,2}$$

4.1.

Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes contidas no plano. Portanto, uma recta é perpendicular a um plano se um vector director da recta for perpendicular a dois vectores não colineares do plano.

Consideremos então um vector director da recta dada e verifiquemos que esse vector é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$.

Como a recta é definida pela condição $x = 0 \ \wedge \ y = 2\,z$, tem-se que os pontos $(0,0,0)$ e $(0,2,1)$ pertencem à recta, pelo que o vector

$$\vec{u} = (0,2,1) - (0,0,0) = (0,2,1)$$

é um vector director da recta.

Por outro lado, como $[RSTU]$ é um quadrado de área igual a $16,$ tem-se que $\overline{ST} = 4,$ pelo que as coordenadas de S e de T são, respectivamente, $(2,2,0)$ e $(-2,2,0)$.

Portanto,

$$\overrightarrow{ST} = T - S = (-2,2,0) - (2,2,0) = (-4,0,0)$$

$$\overrightarrow{SV} = V - S = (0,0,4) - (2,2,0) = (-2,-2,4)$$

Vejamos então se o vector $\vec{u}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$.
Tem-se:

$$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{ST} = (0,2,1).(-4,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{SV} = (0,2,1).(-2,-2,4) = 0 - 4 + 4 = 0$$

Concluímos que o vector $\vec{u}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SV}$, pelo que a recta dada é perpendicular ao plano STV.

Equação do plano

Um vector normal ao plano: $\vec{u} = (0,2,1)$

Um ponto do plano: $(2,2,0)$

Uma equação do plano: $0\,(x-2) + 2(y-2) + 1(z-0) = 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ 2\,y - 4 + z = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\,y + z = 4$

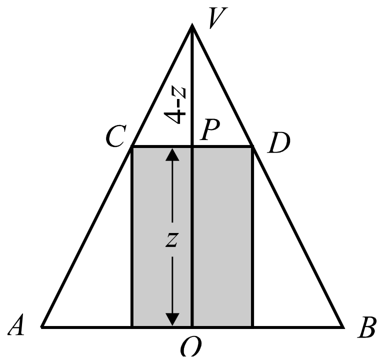
4.2.1.

O ponto P desloca-se ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V. Sendo assim, a cota do ponto P varia entre a cota do ponto O, que é 0, e a cota do ponto V, que é 4.

O domínio da função f é, portanto, o intervalo $]\,0, 4\,[$.

Com vista a determinar uma expressão que defina a função f, comecemos por determinar o raio r do cilindro, em função de z.

Na figura está representada a secção, da pirâmide e do cilindro, obtida pela intersecção destes com o plano yOz.



De acordo com este esquema, e atendendo a que os triângulos $[VPD]$ e $[VOB]$ são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{VP}}{\overline{VO}} \Leftrightarrow \frac{r}{2} = \frac{4-z}{4} \Leftrightarrow r = \frac{4-z}{2}$$

O volume do cilindro, em função de z, será, então

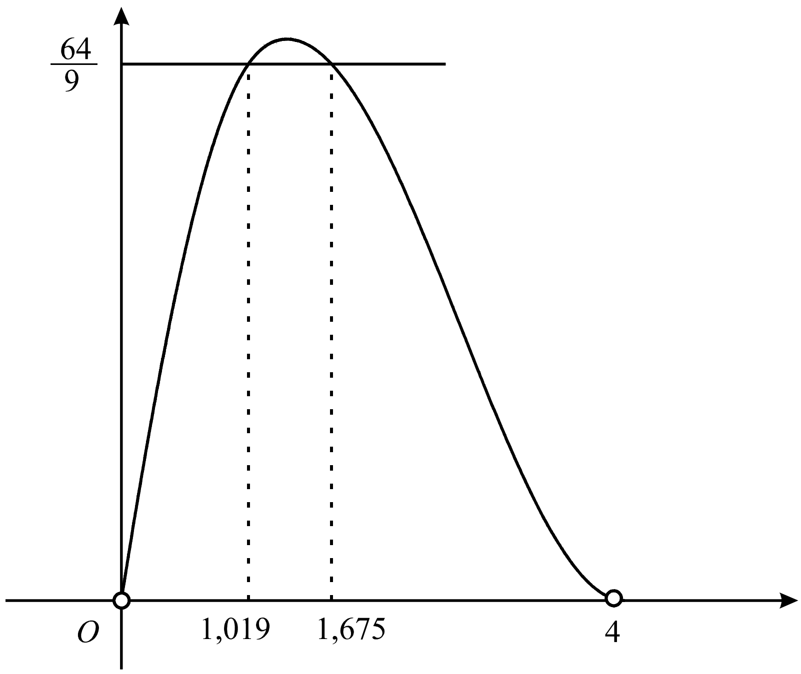
$$\begin{aligned} f(z) &= A_{base} \times altura = \\ &= \pi \times r^2 \times z = \\ &= \pi \times \left(\frac{4-z}{2}\right)^2 \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^2 - 8z + 16}{4} \times z = \\ &= \pi \times \frac{z^3 - 8z^2 + 16z}{4} = \pi\left(\frac{z^3}{4} - 2\,z^2 + 4\,z\right) \end{aligned}$$

4.2.2.

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \times altura}{3} = \frac{16 \times 4}{3} = \frac{64}{3}$$

$$f(z) > \frac{1}{3} \times \frac{64}{3} \Leftrightarrow f(z) > \frac{64}{9}$$

Com o objectivo de resolver graficamente a inequação $f(z) > \frac{64}{9}$, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função f e a recta de equação $y = \frac{64}{9}$



Da observação do gráfico, podemos concluir que a cota do ponto P deve variar entre 1,019 e 1,675.