TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

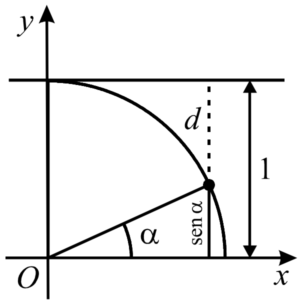
1. $h'(1)$ é o declive da recta t, que é igual a $\frac{1}{2}$ — Resposta **C**

2. $(f \circ g)(-3) = f[g(-3)] = f(-4) = |-4| = 4$ — Resposta **D**

3. De acordo com a figura, tem-se

$d + \operatorname{sen} \alpha = 1$, pelo que

$d = 1 - \operatorname{sen} \alpha$



Resposta **B**

4. Sendo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\pi - x$ é a amplitude de um ângulo do segundo quadrante e $\frac{3\pi}{2} - x$ é a amplitude de um ângulo do terceiro quadrante.
Ora, no terceiro quadrante, quer o seno, quer o co-seno são negativos.
No segundo quadrante, apenas o seno é positivo. — Resposta **B**

5. Sendo $(0, 0, 1)$ um vector director da recta r, tem-se que esta recta é paralela ao eixo Oz. A condição $x = 2 \wedge y = 1$ também define uma recta paralela ao eixo Oz (dado que corresponde à intersecção de dois planos paralelos a este eixo).

Resposta **C**

Grupo II

1.1. Tem-se o seguinte quadro:

x	$-\infty$	-3		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x) \times g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$

$n.d.$ - não definida

Portanto, o conjunto solução da inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$ é $]-\infty, -3] \cup [0, 2[$

1.2. Do gráfico de f resulta que $f(x) = 3 + \dfrac{b}{x-2}$

Como $f(0) = 0$, vem $3 + \dfrac{b}{0-2} = 0$, pelo que $\dfrac{b}{-2} = -3$,

ou seja, $b = 6$

Tem-se, portanto, $a = 3$, $b = 6$ e $c = 2$

2.1. O volume de uma pirâmide é igual a $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da Base} \times \textit{Altura}$

A base da pirâmide é um quadrado de lado $2x$, pelo que a sua área é $4x^2$

A altura da pirâmide é a cota c do ponto E

Uma vez que $x + c = 6$, vem $c = 6 - x$

Assim, $V(x) = \dfrac{1}{3} \times 4x^2 \times (6-x) = 8x^2 - \dfrac{4}{3}x^3$

2.2. Tem-se $V'(x) = 16x - 4x^2$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(16 - 4x) = 0$

Como $x \in]0, 6[$, tem-se $x \neq 0$, pelo que

$x(16 - 4x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Pode elaborar-se o o seguinte quadro:

x	0	4	6
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	*Máx*	$\searrow$

$V(4) = 8 \times 4^2 - \dfrac{4}{3} \times 4^3 = 128 - \dfrac{256}{3} = \dfrac{128}{3}$

O volume da pirâmide é máximo quando $x = 4$, sendo esse volume igual a $\dfrac{128}{3}$

2.3. Tem-se: $A(1,1,0)$ $B(-1,1,0)$ $E(0,0,5)$

Um vector perpendicular ao plano é um vector perpendicular a dois vectores não colineares do plano, como, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$. Tem-se:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (0,0,5) - (1,1,0) = (-1,-1,5)$

Seja $\overrightarrow{n}\ (a,b,c)$ um vector perpendicular a estes dois vectores. Tem-se:

$\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c)\,.\,(-2,0,0) = 0 \Leftrightarrow -2a + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow (a,b,c)\,.\,(-1,-1,5) = 0 \Leftrightarrow -a - b + 5c = 0 \Leftrightarrow a + b = 5c$

Ora, $a = 0 \wedge a + b = 5c \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 5c$

Fazendo, por exemplo, $c = 1$, vem $\overrightarrow{n} = (0,5,1)$

Assim, uma equação de um plano perpendicular a $\overrightarrow{n}$ é da forma $5y + z + d = 0$

Como o plano ABE contém o ponto $A(1,1,0)$, vem $d = -5$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABE é $5y + z - 5 = 0$

3.1. Se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, sai de casa 10 minutos depois das sete e meia, pelo que $t = 10$. A duração da viagem, em minutos, é, assim, $d(10) = 45 - \dfrac{5600}{10^2 + 300} = 31$

Tem-se 7 h 40 m $+$ 31 m $=$ 8 h 11 m

Se a Maria sair de casa às 7 h 55 m, sai de casa 25 minutos depois das sete e meia, pelo que $t = 25$. A duração da viagem, em minutos, é, assim, $d(25) = 45 - \dfrac{5600}{25^2 + 300} \approx 39$

Tem-se 7 h 55 m $+$ 39 m $=$ 8 h 34 m, pelo que a Maria chega atrasada às aulas.

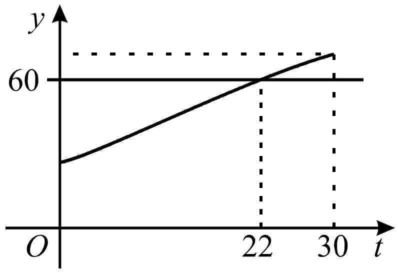
3.2. Para a Maria não chegar atrasada às aulas, o tempo que decorre desde as sete e meia até à hora de chegada à escola não pode exceder 60 minutos, que é o tempo que decorre entre as sete e meia e as oito e meia.

Portanto, a soma do tempo t, que decorre desde as sete e meia até que ela sai de casa, com o tempo $d(t)$, da viagem, não pode exceder 60 minutos.

Assim, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$

Na figura junta está:

- o gráfico, obtido na calculadora, da função definida por $y = t + d(t)$, ou seja, da função definida por $y = t + 45 - \dfrac{5600}{t^2 + 300}$
- a recta de equação $y = 60$



O ponto de intersecção das duas linhas tem abcissa 22 (valor arredondado às unidades), pelo que, para não chegar atrasada às aulas, a Maria tem de sair de casa até 22 minutos depois das sete e meia, ou seja , até às 7 h 52 m.