TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ tem centro no ponto de coordenadas $(0, 0, 2)$ e raio 2, pelo que é tangente ao plano xOy. Assim, a intersecção da superfície esférica com este plano é um ponto.

Resposta **B**

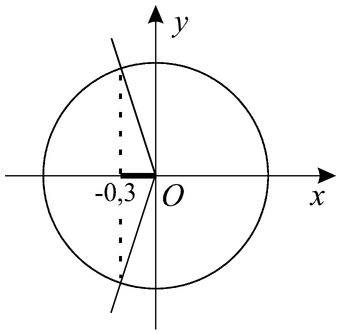
2. A recta r tem declive $-\frac{1}{2}$, pelo que o declive da recta s é 2

Este facto exclui as alternativas B e C.

Entre as alternativas A e D, a que corresponde a uma recta que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$ é a alternativa A.

Resposta **A**

3. Na figura está representado o círculo trigonométrico, bem como os lados extremidade dos ângulos cujo co-seno é $-0{,}3$



Como se pode observar:

- em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, a equação $\cos x = -0{,}3$ não tem solução.
- em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, a equação $\cos x = -0{,}3$ tem duas soluções.
- em $[0, \pi]$, a equação $\cos x = -0{,}3$ tem apenas uma solução.

Resposta **B**

4. Tem-se $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = \overline{OC} + \overline{BC} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{C}}$

5. Das alternativas apresentadas, apenas a C e a D correspondem a pontos pertencentes à fronteira da região admissível. Este facto permite excluir as alternativas A e B. Das hipóteses C e D, aquela em que a função objectivo tem valor mais elevado é a D, pois
$3 \times 6 + 2 > 3 \times 4 + 3$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{D}}$

Grupo II

1.1. A área do triângulo $[ACD]$ é igual à diferença entre a área do triângulo $[ABD]$ e a área do triângulo $[ABC]$.

- Área do triângulo $[ABC] = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$

- Área do triângulo $[ABD] = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{BD}}{2}$

Como $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$ vem $\overline{BD} = 2\operatorname{tg}(x)$

Assim, a área do triângulo $[ABD]$ é igual a $\dfrac{2 \times 2\ \operatorname{tg}(x)}{2} = 2\operatorname{tg}(x)$

Logo, a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2\operatorname{tg}(x) - 1$

1.2. $2\operatorname{tg}(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}(x) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) = 1$

Como x designa a amplitude, em radianos, de um ângulo agudo, tem-se $x = \dfrac{\pi}{4}$

Outro processo:

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a 1.

Portanto, tem-se:

Área do triângulo $[ACD] = 1 \Leftrightarrow$ Área do triângulo $[ABD] = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \overline{BD}}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{2 \times \overline{BD}}{2} = 2 \Leftrightarrow \overline{BD} = 2$$

Tem-se, então, $\overline{AB} = \overline{BD}$ pelo que $x = \dfrac{\pi}{4}$

1.3. Tem-se $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos(a) = \frac{5}{13}$

Como $1 + \operatorname{tg}^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$ e como $\cos(a) = \frac{5}{13}$ vem:

$$1 + \operatorname{tg}^2(a) = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2(a) = \frac{1}{\frac{25}{169}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2(a) = \frac{169}{25} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(a) = \frac{169}{25} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(a) = \frac{144}{25}$$

Como a pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem $\operatorname{tg}(a) = \frac{12}{5}$

Logo, $2\operatorname{tg}(a) - 1 = 2 \times \frac{12}{5} - 1 = \frac{19}{5}$

2.1. O vector de coordenadas $(1, 2, -2)$ é perpendicular ao plano α, pelo que também é perpendicular ao plano γ.

Assim, o plano γ pode ser definido por uma equação do tipo $x + 2y - 2z + d = 0$

Como este plano contém o vértice do cone, o qual tem coordenadas $(1, 2, 6)$, vem:

$1 + 2 \times 2 - 2 \times 6 + d = 0$, donde resulta $d = 7$

Portanto, uma equação do plano γ é $x + 2y - 2z + 7 = 0$

2.2. O vector de coordenadas $(1, 2, -2)$ é perpendicular ao plano α.

O vector de coordenadas $(2, -1, 1)$ é perpendicular ao plano β.

Os planos α e β são perpendiculares se, e só se, os vectores de coordenadas $(1, 2, -2)$ e $(2, -1, 1)$ forem perpendiculares, ou seja, se, e só se, o produto escalar $(1, 2, -2) \cdot (2, -1, 1)$ for igual a zero.

Ora, $(1, 2, -2) \cdot (2, -1, 1) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 1 = -2$

Portanto, os planos α e β não são perpendiculares.

2.3. Tem-se que o ponto W tem coordenadas $(1, 2, -6)$

A recta VW pode ser definida pela condição $x = 1 \wedge y = 2$

Assim, uma condição que define o segmento de recta $[VW]$ é

$x = 1 \quad \wedge \quad y = 2 \quad \wedge \quad -6 \leq z \leq 6$

2.4. O volume de um cone é igual a $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Relativamente ao cone em causa, tem-se:

- A área da base é igual a $\pi \times 3^2 = 9\pi$

- A altura é igual a $\left\|\overrightarrow{VC}\right\|$

Para determinarmos $\left\|\overrightarrow{VC}\right\|$, precisamos de saber as coordenadas do ponto C.

O ponto C é o ponto de intersecção do plano α com a recta perpendicular a este plano e que passa por V.

Tem-se:
- uma condição que define o plano α é $x + 2y - 2z = 11$
- uma condição que define a recta perpendicular a este plano e que passa por V é
  $(x, y, z) = (1, 2, 6) + \lambda\,(1, 2, -2)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Assim, as coordenadas de C satisfazem a condição
$(x, y, z) = (1, 2, 6) + \lambda\,(1, 2, -2) \ \wedge \ x + 2y - 2z = 11\,,$ que é equivalente a
$(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 6 - 2\lambda) \ \wedge \ x + 2y - 2z = 11$

Tem-se: $1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) = 11 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ 1 + \lambda + 4 + 4\lambda - 12 + 4\lambda = 11 \ \Leftrightarrow \ 9\lambda = 18 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 2$

Portanto, o ponto C tem coordenadas $(1 + 2, 2 + 2 \times 2, 6 - 2 \times 2) = (3, 6, 2)$

Vem, então: $\left\|\overrightarrow{VC}\right\| = \|C - V\| = \|(2, 4, -4)\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$

Portanto, o volume do cone é igual a $\frac{1}{3} \times 9\pi \times 6 = 18\pi$

3. Como $\overline{OA} = \overline{OC}$, o triângulo $[OAC]$ é isósceles.

Como o triângulo $[OAC]$ é isósceles, a altura $[OD]$ intersecta $[AC]$ no ponto médio deste segmento, donde $\overline{AD} = \overline{DC}$, pelo que $\overline{AC} = 2\,\overline{AD}$

Como o ângulo COB é um ângulo ao centro, a amplitude do arco CB é igual à amplitude do ângulo COB.

Portanto, a amplitude do arco CB é igual a α.

O ângulo CAB é um ângulo inscrito, pelo que a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco CB.

Logo, a amplitude do ângulo CAB é igual a $\frac{\alpha}{2}$

Como $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AO}}$ vem $\overline{AD} = \overline{AO}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Tem-se $\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Como $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \overline{AB} = 2\,r$

e como $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \overline{AC} = 2\,\overline{AD} = 2\,r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

vem $\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} = 2\,r \times 2\,r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\,r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$