TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. $f(-4) + f^{-1}(2) = -3+3=0$

Resposta **B**

2. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge g(x) \neq 0$

Portanto, os zeros da função $\dfrac{f}{g}$ são os zeros da função f que não são zeros da função g

Como a função f tem cinco zeros e um deles também é zero da função g, a função $\dfrac{f}{g}$ tem quatro zeros.

Resposta **C**

3. $(g \circ f)(3) = g\big[f(3)\big] = g(1) = 2$

Resposta **D**

4. O perímetro do triângulo $[ACD]$ é igual a $\overline{AD} + \overline{AC} + \overline{CD}$

Tem-se:

$$\overline{AD} + \overline{AC} + \overline{CD} = x + 5 + \sqrt{4^2 + (3-x)^2} =$$
$$= x + 5 + \sqrt{16+9-6x+x^2} =$$
$$= x + 5 + \sqrt{x^2-6x+25}$$

Resposta **D**

5. $\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = \left\| \overrightarrow{CA} \right\| \times \left\| \overrightarrow{CB} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{CA} \,\hat{}\, \overrightarrow{CB}\right) =$

$$= 4 \times 4 \times \cos 180° = 4 \times 4 \times (-1) = -16$$

Resposta **B**

GRUPO II

1. O ponto A pertence ao eixo Ox, pelo que a sua ordenada e a sua cota são iguais a zero.

Como o ponto A pertence ao plano ABC, vem:

$6x + 3 \times 0 + 4 \times 0 = 12 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

Portanto, o ponto A tem coordenadas $(2, 0, 0)$

Como o plano ABC tem equação $6x + 3y + 4z = 12$, o vector de coordenadas $(6, 3, 4)$ é perpendicular ao plano, pelo que é um vector director da recta r

Assim, uma equação vectorial da recta r é

$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k\,(6, 3, 4), \quad k \in \mathbb{R}$

2. Como o ponto P, de coordenadas $(\operatorname{tg}\alpha\,,\ \operatorname{sen}\alpha\,,\ 2 + \cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E, de equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, tem-se

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + (2 + \cos\alpha - 2)^2 = 4$$

Vem, então:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + (2 + \cos\alpha - 2)^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 4 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 4 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}^2\alpha = 3$$

Como α pertence ao intervalo $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, vem $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Portanto, as coordenadas do ponto P são $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\,,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\,,\ 2 + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$

$$= \left(\sqrt{3}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 2 + \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{5}{2}\right)$$

3.1. No início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A era igual a $a(0) = 6$, ou seja, no início do ano 2009, havia $6\,000$ indivíduos da espécie A.

No início do ano 2010, o número de animais, em milhares, da espécie A era igual a $a(1) = 8{,}5$, ou seja, no início do ano 2010, havia $8\,500$ indivíduos da espécie A.

Por isso, desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, o número de indivíduos da espécie A aumentou $2\,500$

Como, no intervalo de tempo referido, morreram 500 animais da espécie A, podemos concluir que, no mesmo intervalo de tempo, nasceram $3\,000$ animais dessa espécie $(2\,500 + 500 = 3\,000)$.

3.2. Tem-se:

$$a(t) = \frac{11\,t+6}{t+1} = 11 - \frac{5}{t+1}$$

$$\begin{array}{r|l} 11\,t\ +\ 6 & t\ +\ 1 \\ \cline{2-2} -\,11\,t\ -\ 11 & 11 \\ \cline{1-1} -\,5 & \end{array}$$

$$b(t) = \frac{t+9}{t+3} = 1 + \frac{6}{t+3}$$

$$\begin{array}{r|l} t\ +\ 9 & t\ +\ 3 \\ \cline{2-2} -\,t\ -\ 3 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Portanto, as assimptotas horizontais dos gráficos das funções a e b são, respectivamente, as rectas de equações $y = 11$ e $y = 1$

Tem-se assim que, com o passar do tempo, o número de animais da espécie A tende para $11\,000$ e o número de animais da espécie B tende para $1\,000$, pelo que a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B tende para $10\,000$

4.1. $f(x) \leq 5 \;\Leftrightarrow\; 3 + \frac{6}{x} \leq 5 \;\Leftrightarrow\; 3 + \frac{6}{x} - 5 \leq 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; -2 + \frac{6}{x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2\,x+6}{x} \leq 0$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-\,2\,x + 6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Quociente	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$

Portanto, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \leq 5$ é $]-\infty, 0\,[\; \cup\; [3\,, +\infty\,[$

4.2. O declive da recta r é igual a $f\,'(2)$, derivada da função f no ponto 2

Tem-se que $f\,'(x) = \left(3 + \frac{6}{x}\right)' = -\,\frac{6}{x^2}$, pelo que

$f\,'(2) = -\,\frac{6}{4} = -\,\frac{3}{2}$

A equação reduzida da recta r é, portanto, da forma $y = -\,\frac{3}{2}\,x + b$

Como $f(2) = 3 + \frac{6}{2} = 3 + 3 = 6,$ a recta r passa no ponto $(2, 6)$, pelo que se tem

$6 = -\,\frac{3}{2} \times 2\, +\, b$, donde vem que $b = 9$

Portanto, a equação reduzida da recta r é $y = -\,\frac{3}{2}\,x + 9$

4.3. Tem-se que $g'(x) = \left(\frac{1}{3}\,x^3 - 3x^2 + 8x - 3\right)' = x^2 - 6x + 8$

Portanto, $g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \;\vee\; x = 4$

Portanto, a abcissa de A é 2 e a abcissa de B é 4

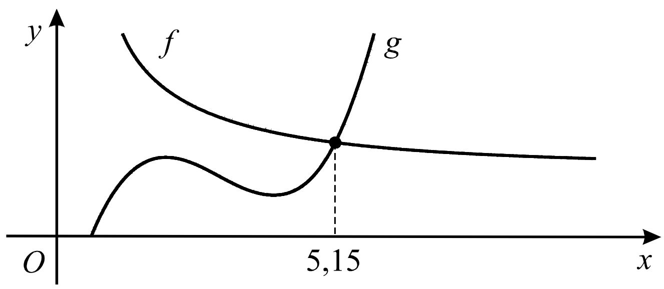
Como

$g(2) = \frac{1}{3} \times 8 - 3 \times 4 + 8 \times 2 - 3 = \frac{11}{3}$, o ponto A tem ordenada $\frac{11}{3}$

A área do triângulo $[OAC]$ é, portanto, $\dfrac{4 \times \frac{11}{3}}{2} = \dfrac{22}{3}$

4.4. As soluções da equação $f(x) = g(x)$ são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g

Na figura, estão representadas graficamente as funções f e g, na janela de visualização $[0, 10] \times [0, 10]$, e está assinalado o ponto de intersecção dos gráficos que tem abcissa positiva.



A solução positiva da equação, arredondada às centésimas, é $5{,}15$