Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 27.01.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $(r$ *– raio da base; g – geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ $(r$ *– raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $(r$ *– raio*$)$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Num certo problema de programação linear pretende-se **minimizar** a função objectivo, a qual é definida por $L = 2x + y$

Na Figura 1, está representada a região admissível.

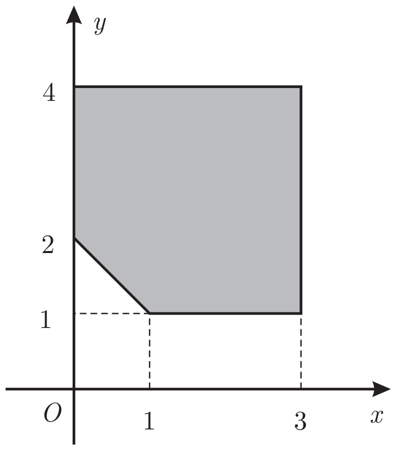

Figura 1

Numa das opções seguintes está a solução desse problema.

Em qual delas?

(A) $x = 1$ e $y = 1$

(B) $x = 0$ e $y = 2$

(C) $x = 3$ e $y = 1$

(D) $x = 0$ e $y = 1$

2. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0{,}9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $\left[0, \pi\right]$ **(C)** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **(D)** $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

3. De um triângulo isósceles $[ABC]$ sabe-se que:

- os lados iguais são $[AB]$ e $[AC]$, tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
- cada um dos dois ângulos iguais tem 30° de amplitude.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$?

(A) $-32\sqrt{3}$

(B) -32

(C) 64

(D) $64\sqrt{3}$

4. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto $A(1{,}0)$
- a recta s passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P, cuja ordenada é 2
- o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à recta s

Seja α a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ

Qual é o valor de α, arredondado às centésimas?

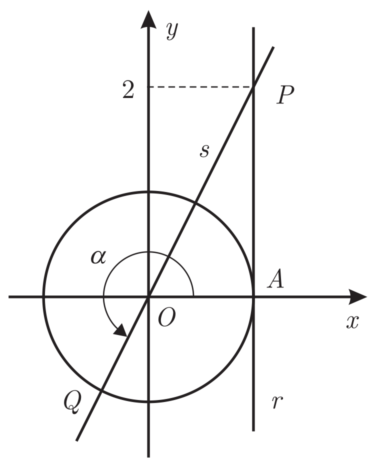

Figura 2

(A) $4{,}23$

(B) $4{,}25$

(C) $4{,}27$

(D) $4{,}29$

5. Sejam α, β e θ três números reais.

Sabe-se que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta$?

(A) $2\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

(B) $2\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

(C) $-\cos\alpha$

(D) $\cos\alpha$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 5

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B

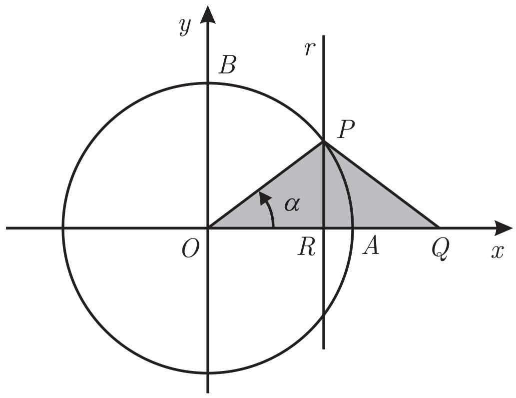

Figura 3

Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 25\,\operatorname{sen}x\,\cos x$

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

1.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $f(\alpha)$

1.2. Determine o valor de α, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25\cos^2\alpha$

1.3. Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f(\theta) = 5$

Determine o valor de $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$

1.4. Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3

Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

2. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQURST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$
- o plano QTV é definido pela equação $5x + 2y + 2z = 12$

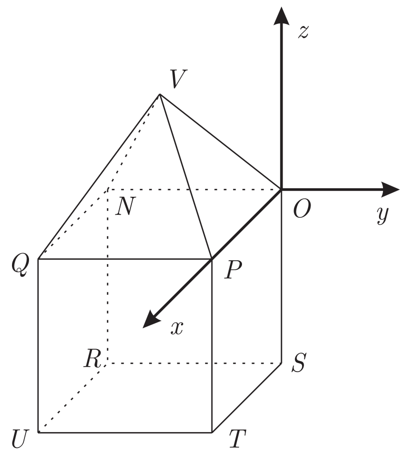

Figura 4

2.1. Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma **condição cartesiana** que o defina.

2.1.1. Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.

2.1.2. Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V

2.1.3. Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U

2.1.4. Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T

2.2. Considere um ponto A, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U

Sabe-se que $\overrightarrow{OA} \, . \, \overrightarrow{OT} = 8$

Determine a cota do ponto A

2.3. Determine o volume do poliedro $[VNOPQURST]$

3. Na Figura 5, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- o ponto I é o ponto médio do lado $[DC]$
- o ponto J é o ponto médio do lado $[BC]$

Prove que $\overrightarrow{AI} \, . \, \overrightarrow{AJ} = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{AJ}$ como soma de dois vectores.

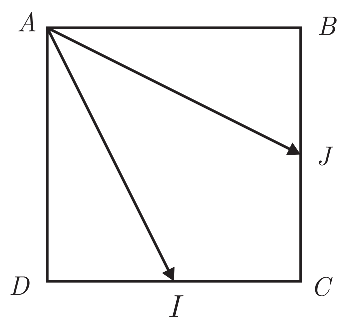

Figura 5

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	20 pontos
1.2.	15 pontos
1.3.	15 pontos
1.4.	20 pontos
2.	
2.1.	
2.1.1.	5 pontos
2.1.2.	5 pontos
2.1.3.	5 pontos
2.1.4.	5 pontos
2.2.	20 pontos
2.3.	20 pontos
3.	20 pontos
	150 pontos

TOTAL .... **200 pontos**