

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 27.01.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Num certo problema de programação linear pretende-se **minimizar** a função objectivo, a qual é definida por $L = x + 2y$

Na Figura 1, está representada a região admissível.

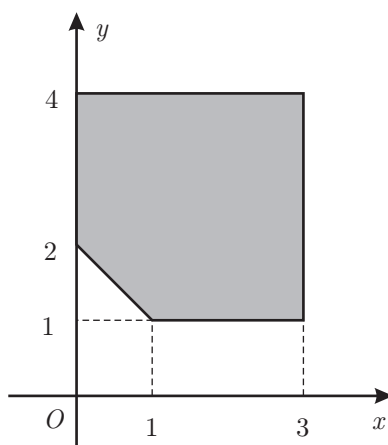


Figura 1

Numa das opções seguintes está a solução desse problema.

Em qual delas?

- (A) $x = 1$ e $y = 1$
- (B) $x = 0$ e $y = 2$
- (C) $x = 3$ e $y = 1$
- (D) $x = 0$ e $y = 1$

2. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica $\sin x = 0,9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

- (A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

3. De um triângulo isósceles $[ABC]$ sabe-se que:

- os lados iguais são $[AB]$ e $[AC]$, tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
- cada um dos dois ângulos iguais tem 15° de amplitude.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

- (A) $64\sqrt{3}$
(B) 64
(C) -32
(D) $-32\sqrt{3}$

4. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- a recta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$
- a recta s passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P , cuja ordenada é 2
- o ponto Q , situado no terceiro quadrante, pertence à recta s

Seja α a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta OQ

Qual é o valor de α , arredondado às centésimas?

- (A) 4,29
(B) 4,27
(C) 4,25
(D) 4,23

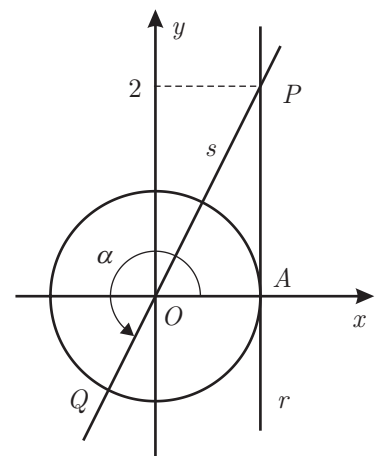


Figura 2

5. Sejam α , β e θ três números reais.

Sabe-se que:

- $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

- $\alpha + \theta = \pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta$?

(A) $-\text{sen } \alpha$

(B) $\text{sen } \alpha$

(C) $2 \cos \alpha - \text{sen } \alpha$

(D) $2 \cos \alpha + \text{sen } \alpha$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de centro em O e raio 10

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy , respectivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto A , nem com o ponto B

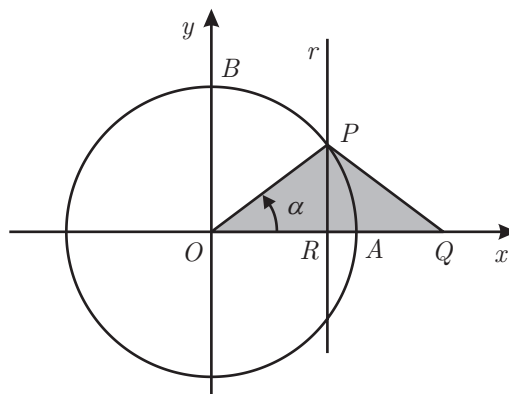


Figura 3

Para cada posição do ponto P , sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a recta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 100 \operatorname{sen} x \cos x$

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

1.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $f(\alpha)$

1.2. Determine o valor de α , pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 100 \cos^2 \alpha$

1.3. Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f(\theta) = 10$
Determine o valor de $(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2$

1.4. Considere agora o caso em que a abscissa do ponto P é 6

Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

2. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(6, -6, -6)$
- o plano QTV é definido pela equação $7x + 3y + 3z = 24$

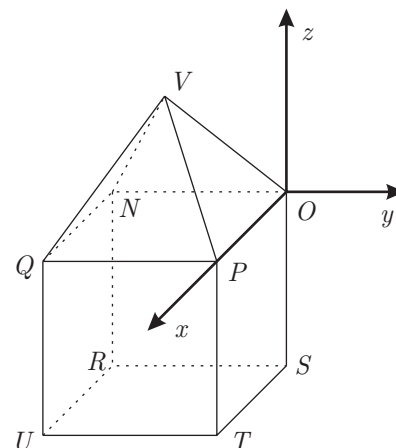


Figura 4

- 2.1. Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma **condição cartesiana** que o defina.

2.1.1. Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.

2.1.2. Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V

2.1.3. Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U

2.1.4. Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T

- 2.2. Considere um ponto A , com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U

Sabe-se que $\vec{OA} \cdot \vec{OT} = 6$

Determine a cota do ponto A

- 2.3. Determine o volume do poliedro $[VNOPQRST]$

3. Na Figura 5, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- o ponto M é o ponto médio do lado $[DC]$
- o ponto L é o ponto médio do lado $[AD]$

Prove que $\vec{BL} \cdot \vec{BM} = \|\vec{BC}\|^2$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores \vec{BL} e \vec{BM} como soma de dois vectores.

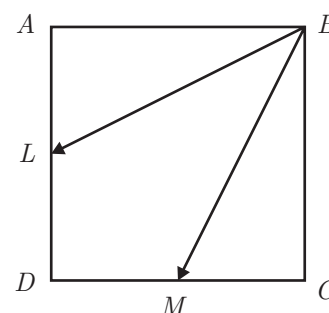


Figura 5

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

| | | |
|----|-------|------------------|
| 1. | | 10 pontos |
| 2. | | 10 pontos |
| 3. | | 10 pontos |
| 4. | | 10 pontos |
| 5. | | 10 pontos |
| | | <hr/> |
| | | 50 pontos |

GRUPO II

| | | |
|--------|-------|-------------------|
| 1. | | |
| 1.1. | | 20 pontos |
| 1.2. | | 15 pontos |
| 1.3. | | 15 pontos |
| 1.4. | | 20 pontos |
| 2. | | |
| 2.1. | | |
| 2.1.1. | | 5 pontos |
| 2.1.2. | | 5 pontos |
| 2.1.3. | | 5 pontos |
| 2.1.4. | | 5 pontos |
| 2.2. | | 20 pontos |
| 2.3. | | 20 pontos |
| 3. | | 20 pontos |
| | | <hr/> |
| | | 150 pontos |

TOTAL **200 pontos**