Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 27.01.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(A)**

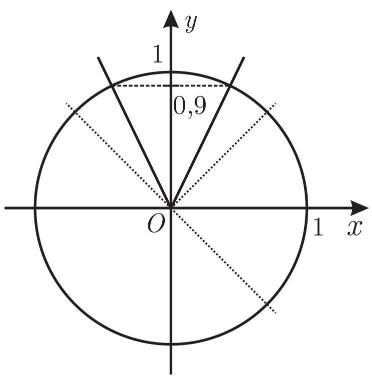
A opção **(D)** é excluída, porque o ponto $(0{,}1)$ não pertence à fronteira da região admissível.

Relativamente às restantes opções, tem-se:

Opções	x	y	$L = x + 2y$
(A)	1	1	$L = 1 + 2 \times 1 = 3$
(B)	0	2	$L = 0 + 2 \times 2 = 4$
(C)	3	1	$L = 3 + 2 \times 1 = 5$

2. Resposta **(D)**

Na figura, estão representados o círculo trigonométrico, os lados extremidade dos ângulos cujo seno é $0{,}9$ e, a ponteado, os lados extremidade dos ângulos que têm $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$ radianos de amplitude.

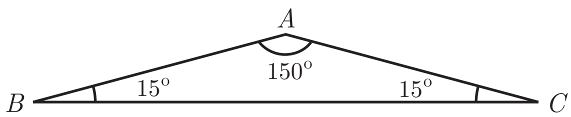


Como se pode observar:

- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}9$ tem uma solução;
- no intervalo $\left[0, \pi\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}9$ tem duas soluções;
- no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}9$ tem duas soluções;
- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}9$ não tem solução.

3. Resposta **(D)**

Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$



Tem-se $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC}\right) =$

$= 8 \times 8 \times \cos 150^\circ = 64 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -32\sqrt{3}$

4. Resposta **(C)**

Recorrendo à calculadora, podemos obter um valor aproximado da amplitude, em radianos, do ângulo pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a 2

Tem-se $\operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 1{,}107$

Portanto, $\alpha \approx 1{,}107 + \pi \approx 4{,}25$

5. Resposta **(B)**

Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, tem-se $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Como $\alpha + \theta = \pi$, tem-se $\theta = \pi - \alpha$

Logo, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\pi - \alpha\right) =$

$= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

GRUPO II

1.1. No triângulo $[OPQ]$, o segmento de recta $[PR]$ é a altura relativa à base $[OQ]$

Assim, a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\dfrac{\overline{OQ} \times \overline{PR}}{2}$

Tem-se:

- $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OR}}{10}$, pelo que $\overline{OR} = 10\cos\alpha$ e, portanto, $\overline{OQ} = 20\cos\alpha$

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{PR}}{10}$, pelo que $\overline{PR} = 10\ \operatorname{sen}\alpha$

Portanto, a área do triângulo $[OPQ]$ é $\dfrac{20\cos\alpha \times 10\operatorname{sen}\alpha}{2} = 100\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = f(\alpha)$

1.2. $f(\alpha) = 100\cos^2\alpha \Leftrightarrow 100\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 100\cos^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha$

Como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha \neq 0$

Portanto, para $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

1.3. $f(\theta) = 10 \Leftrightarrow 100\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 10 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta = \dfrac{1}{10}$

Então

$$\left(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + 2\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta + \cos^2\theta =$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta =$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

Portanto,

$$\left(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right)^2 = \frac{6}{5}$$

1.4. A ordenada do ponto P é $\overline{PR}$

Como o triângulo $[OPR]$ é rectângulo, por aplicação do teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OR}^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

Assim, as coordenadas do ponto P são $(6,\ 8)$

Vamos determinar a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P por dois processos.

1.º Processo

A recta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à recta OP. Como o vector $\overrightarrow{OP}$ tem coordenadas $(6, 8)$, o declive da recta OP é $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ e, portanto, o declive da recta tangente à circunferência no ponto P é $-\frac{3}{4}$

Assim, a equação reduzida da recta pedida é da forma $y = -\frac{3}{4}x + b$

Como o ponto P pertence a esta recta, vem

$$8 = -\frac{3}{4} \times 6 + b \Leftrightarrow 8 = -\frac{18}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{50}{4} \Leftrightarrow b = \frac{25}{2}$$

Assim, a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$

2.º Processo

Um ponto $G(x, y)$ pertence à recta tangente à circunferência no ponto P se e só se os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{GP}$ forem perpendiculares, ou seja, se e só se $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GP} = 0$

Tem-se

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (6, 8) - (0, 0) = (6, 8)$$

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (6, 8) - (x, y) = (6 - x,\ 8 - y)$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GP} = 0 \Leftrightarrow (6, 8) \cdot (6 - x,\ 8 - y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(6 - x) + 8(8 - y) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6x + 64 - 8y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = 6x - 100 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{8}x + \frac{100}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$$

Portanto, a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P é

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$$

2.1.1. Dois planos paralelos admitem o mesmo vector normal. Portanto, uma condição cartesiana do plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial é $7x + 3y + 3z = 0$

2.1.2. Um plano perpendicular à recta QN é paralelo ao plano yOz

Portanto, o plano pedido pode ser definido por uma equação da forma $x = k$

Como o ponto V tem abcissa 3, uma condição cartesiana do plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V é $x = 3$

2.1.3. O plano QTV é definido pela equação $7x + 3y + 3z = 24$

Então, o vector de coordenadas $(7,\ 3,\ 3)$ é perpendicular ao plano QTV, sendo, portanto, um vector director da recta de que se pretende escrever uma condição cartesiana.

Uma condição cartesiana da recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto $U(6,-6,-6)$ é

$$\frac{x-6}{7} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+6}{3}$$

2.1.4. O ponto U tem coordenadas $(6,-6,-6)$, e o raio da superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T é $\overline{UT} = 6$

Uma equação cartesiana dessa superfície esférica é $(x-6)^2 + (y+6)^2 + (z+6)^2 = 36$

2.2. Seja z a cota do ponto A

Então o ponto A tem coordenadas $(6,\ -6,\ z)$ e, portanto, o vector $\overrightarrow{OA}$ tem coordenadas $(6,\ -6,\ z)$

O ponto T tem coordenadas $(6,\ 0,\ -6)$ e, portanto, o vector $\overrightarrow{OT}$ tem coordenadas $(6,\ 0,\ -6)$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} = 6 \Leftrightarrow (6,-6,z) \cdot (6,0,-6) = 6 \Leftrightarrow 36 - 6z = 6 \Leftrightarrow z = 5$$

Portanto, o ponto A tem cota 5

2.3. O volume do poliedro $[VNOPQURST]$ pode obter-se como soma do volume do cubo $[NOPQURST]$ com o volume da pirâmide $[VNOPQ]$

O cubo tem aresta 6 e, portanto, o seu volume é $6^3 = 216$

Para calcular o volume da pirâmide é necessário determinar a sua altura.

A altura da pirâmide é igual à cota do ponto V. Este ponto é o ponto do plano QTV que tem abcissa 3 e ordenada -3

Substituindo x por 3 e y por -3 na equação do plano QTV, obtém-se:

$$7 \times 3 + 3 \times (-3) + 3z = 24 \Leftrightarrow 3z = 12 \Leftrightarrow z = 4$$

Tem-se, então, que a altura da pirâmide é igual a 4. Como a base da pirâmide é um quadrado de lado 6, o volume da pirâmide é $\frac{36 \times 4}{3} = 48$

O volume do poliedro $\left[VNOPQURST\right]$ é $216 + 48 = 264$

3. Tem-se $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL}$ e $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$

Então,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{BM} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = \\
&= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{CM} = \\
&= 0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 = \\
&= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BC} = \\
&== \overrightarrow{BA} \cdot \left(\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA}\right) + \left(\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \\
&= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2
\end{aligned}
$$