



Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 09.02.2012

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

$$\alpha r \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio}$)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ ($r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz}$)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ ($r - \text{raio}$)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ ($r - \text{raio}$)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Num referencial o.n. xOy , considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 10$

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1, 3)$

Qual é o declive da reta r ?

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) -3

2. Seja a um número real.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(-1, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ e $ax + 2y + 2z = 1$

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β

Qual é o valor de a ?

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) -2

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

As retas de equações $x = 1$ e $y = 2$ são as assíntotas do gráfico da função f

Para um certo número real k , a função g , definida por $g(x) = f(x) + k$, não tem zeros.

Qual é o valor de k ?

- (A) -1
(B) 1
(C) -2
(D) 2

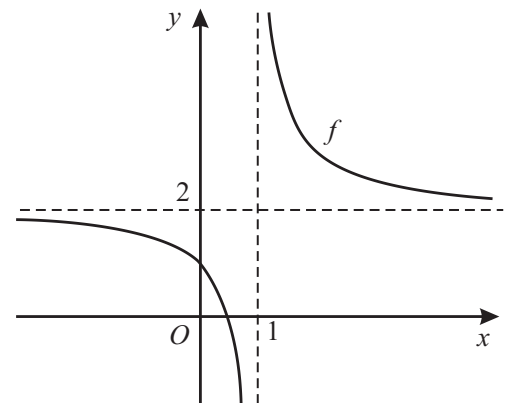


Figura 1

4. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\sin x = -\frac{1}{4}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{4}$?

- (A) $\frac{\pi}{2} + \theta$ (B) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (C) $\pi + \theta$ (D) $\pi - \theta$

5. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 2.

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 3$
- $\widehat{CAB} = 30^\circ$

Seja $\alpha = \widehat{BCA}$

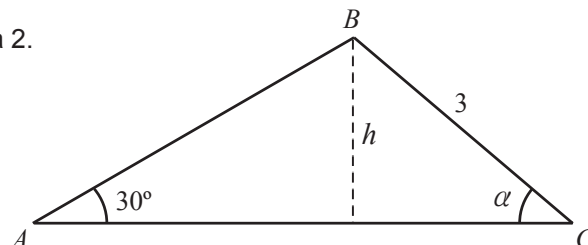


Figura 2

Qual das expressões seguintes representa \overline{AB} , em função de α ?

- (A) $4 \sin \alpha$ (B) $6 \sin \alpha$ (C) $4 \cos \alpha$ (D) $6 \cos \alpha$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f . O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 1

As retas de equações $x = 2$ e $y = -1$ são as assíntotas do gráfico da função f

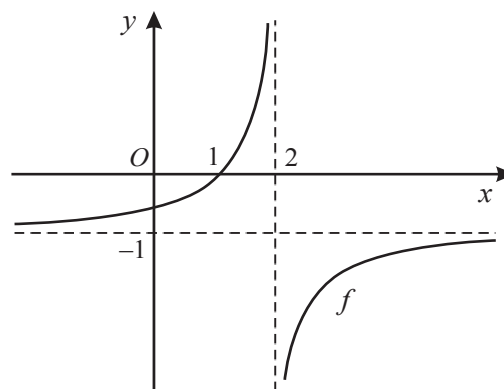


Figura 3

1.1. Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

1.1.1. Indique o contradomínio da função f

1.1.2. Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

1.2. Defina, por uma expressão analítica, a função f

2. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[CDEFB]$

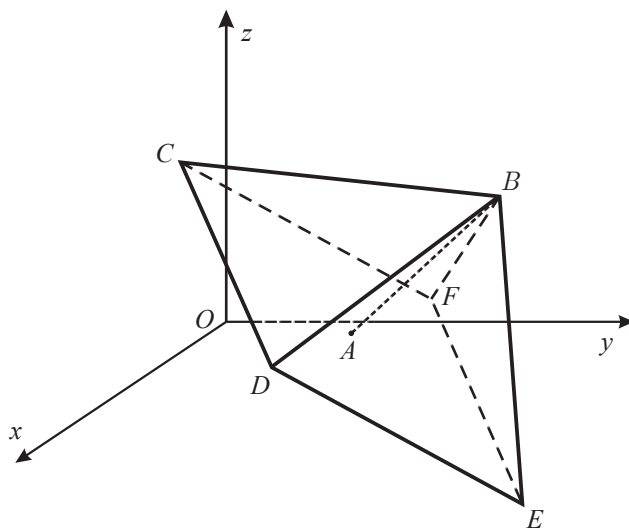


Figura 4

Seja A o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-2, 1, -1)$
- o vetor \overrightarrow{BA} tem coordenadas $(1, -2, -2)$
- a reta BE é definida pela condição $(x, y, z) = (-2, 4, -4) + k(1, 1, -5)$, $k \in \mathbb{R}$

2.1. Escreva uma condição cartesiana que defina a reta BE

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

2.2. Mostre que o plano CDE pode ser definido pela equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$

2.3. Sabe-se que a condição $\begin{cases} x - z = -4 \\ y - z = 2 \end{cases}$ define a reta BF

Determine, **sem recorrer à calculadora**, as coordenadas do ponto F

3. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto B tem coordenadas $(2, 0)$

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P , seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0, 2\pi[$ a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta \dot{OP}

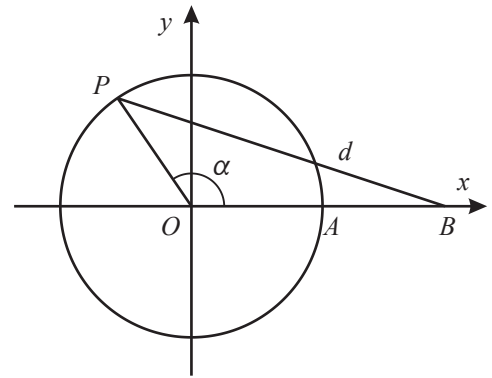


Figura 5

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

- 3.1. Mostre que $d^2 = 5 - 4 \cos \alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

- 3.2. Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que $d^2 = 5 - 4 \cos \alpha$

- 3.2.1. Determine os valores de $\alpha \in [0, 2\pi[$ para os quais $d^2 = 3$

- 3.2.2. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0, \pi]$, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$

Determine d , para esse valor de α

4. No referencial o.n. xOy da Figura 6, estão representados o quadrado $[OABC]$ e o retângulo $[OSUT]$

Os pontos T e C pertencem ao semieixo positivo Ox e os pontos S e A pertencem ao semieixo positivo Oy

O ponto U pertence ao interior do quadrado $[OABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{OC} = c$
- $\overline{OT} = d$
- $\overline{SA} = d$

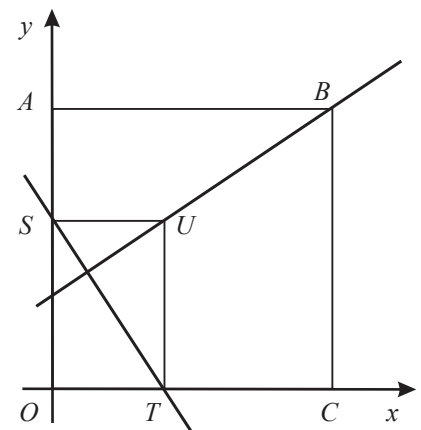


Figura 6

Prove que as retas UB e ST são perpendiculares.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
		<hr/>
		50 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.		
1.1.1.	5 pontos
1.1.2.	10 pontos
1.2.	15 pontos
2.		
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
2.3.	20 pontos
3.		
3.1.	20 pontos
3.2.		
3.2.1.	20 pontos
3.2.2.	20 pontos
4.	15 pontos
		<hr/>
		150 pontos
		<hr/>
TOTAL		200 pontos