GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 2

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 09.02.2012

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

A circunferência definida por $x^2+y^2=10$ tem centro no ponto $O(0,0)$

Designemos por P o ponto de coordenadas $(1,3)$

A reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP

Como o vetor $\overrightarrow{OP}$ tem coordenadas $(1,3)$, o declive da reta OP é 3

Portanto, o declive da reta tangente à circunferência no ponto P é $-\frac{1}{3}$

2. Resposta **(A)**

O vetor $\vec{s}(-1,1,1)$ é um vetor diretor da reta s e o vetor $\vec{n}(a,2,2)$ é um vetor normal ao plano β

Como a reta s é paralela ao plano β, o vetor $\vec{s}$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ e, portanto, $\vec{s}\,.\,\vec{n}=0$

$\vec{s}\,.\,\vec{n}=0 \Leftrightarrow (-1,1,1)\,.\,(a,2,2)=0 \Leftrightarrow 4-a=0 \Leftrightarrow a=4$

3. Resposta **(C)**

Para que a função g não tenha zeros, a assíntota horizontal do seu gráfico tem de ser a reta de equação $y=0$

Portanto, $k=-2$

4. Resposta **(C)**

Sabe-se que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$. Portanto:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$ e $\cos\theta \neq \frac{1}{4}$ porque $\left(\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção A.

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ e $\cos\theta \neq \frac{1}{4}$, o que exclui a opção B.

$\operatorname{sen}(\pi+\theta) = -\operatorname{sen}\theta = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, pelo que a opção C é a opção correta.

$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$, o que exclui a opção D.

5. Resposta **(B)**

Tem-se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{3}$ e, portanto, $h = 3\operatorname{sen}\alpha$

Por outro lado,

$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{h}{\overline{AB}}$ e, portanto, $h = \operatorname{sen} 30^{\circ} \times \overline{AB}$, ou seja, $h = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Logo, $3\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Portanto, $\overline{AB} = 6\operatorname{sen}\alpha$

GRUPO II

1.1.1. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1.1.2. $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$

1.2. Do gráfico da função f decorre que $f(x) = -1 + \frac{a}{x-2}$, para um certo número real a

Como $f(1) = 0$, tem-se $0 = -1 + \frac{a}{1-2}$, pelo que $0 = -1 - a$, ou seja, $a = -1$

Portanto, a função f pode ser definida analiticamente por $f(x) = -1 - \frac{1}{x-2}$

2.1. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-5}$

2.2. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Atendendo a que a pirâmide é regular, tem-se que $[BA]$ é a altura da pirâmide. Portanto, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é um vetor normal ao plano CDE

O vetor $\overrightarrow{BA}$ tem coordenadas $(1, -2, -2)$ e, portanto, o plano CDE pode ser definido por uma equação do tipo $x - 2y - 2z + d = 0$

Como o ponto A tem coordenadas $(-2, 1, -1)$ e pertence ao plano CDE, tem-se:

$-2 - 2 \times 1 - 2 \times (-1) + d = 0$, ou seja, $d = 2$

Assim, o plano CDE pode ser definido pela equação $x - 2y - 2z + 2 = 0$, que é equivalente à equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$

2.º Processo

O plano CDE é o único plano que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BA}$
- passa no ponto A

Vamos provar que o plano definido pela equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$ satisfaz estas duas condições e que é, portanto, o plano CDE

O vetor $(-1, 2, 2)$ é um vetor normal ao plano de equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$

Como o vetor $\overrightarrow{BA}$ é colinear com este vetor, conclui-se que o vetor $\overrightarrow{BA}$ é perpendicular ao plano.

O ponto A pertence ao plano definido pela equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$, pois

$-(-2) + 2 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 = 2 + 2 - 2 - 2 = 0$

2.3. O ponto F é o ponto de intersecção da reta BF com o plano CDE

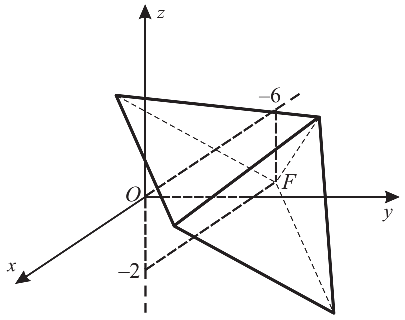
As coordenadas do ponto F são, portanto, a solução do sistema $\begin{cases} -x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x - z = -4 \\ y - z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x - z = -4 \\ y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(z-4) + 2(z+2) + 2z - 2 = 0 \\ x = z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3z = -6 \\ x = z - 4 \\ y = z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ x = -6 \\ y = 0 \end{cases}$$

O ponto F é o ponto de coordenadas $(-6, 0, -2)$

Este ponto está representado na figura ao lado.



3.1. O ponto P tem coordenadas $(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$

Como o ponto B tem coordenadas $(2,0)$, tem-se $d^2=(\cos\alpha-2)^2+(\operatorname{sen}\alpha)^2$

$d^2=(\cos\alpha-2)^2+(\operatorname{sen}\alpha)^2=\cos^2\alpha-4\cos\alpha+4+\operatorname{sen}^2\alpha=$

$=\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+4-4\cos\alpha=1+4-4\cos\alpha=5-4\cos\alpha$

3.2.1. $d^2=3\Leftrightarrow 5-4\cos\alpha=3\Leftrightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ \alpha\in[0,2\pi[\ \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{3}\ \vee\ \alpha=\dfrac{5\pi}{3}$

3.2.2. Como $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{15}$ e $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se:

$(-\sqrt{15})^2+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 16=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{4}\ \vee\ \cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$

Atendendo a que $\alpha\in[0,\pi]$ e a que $\operatorname{tg}\alpha<0$, pode concluir-se que $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ e,

portanto, $\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$

Então, $d^2=5-4\left(-\dfrac{1}{4}\right)=6$ e, portanto, $d=\sqrt{6}$

4. As retas UB e ST são perpendiculares se $\overrightarrow{UB}\,.\,\overrightarrow{ST}=0$

Tem-se: $T(d,0)$, $B(c,c)$, $S(0,\ c-d)$ e $U(d,\ c-d)$

Então, $\overrightarrow{UB}=B-U=(c,c)-(d,c-d)=(c-d,\ c-c+d)=(c-d,\ d)$ e

$\overrightarrow{ST}=T-S=(d,0)-(0,c-d)=(d,-c+d)$

$\overrightarrow{UB}\,.\,\overrightarrow{ST}=(c-d,d)\,.\,(d,-c+d)=(c-d)\times d+d\times(-c+d)=$

$=cd-d^2-cd+d^2=0$

Portanto, as retas UB e ST são perpendiculares.