Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 06.03.2013

11.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto P que tem ordenada igual a -5 e cota igual a 1
Considere também o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(2, 3, 7)$

Sabe-se que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares.

Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) 1 **(B)** 2

(C) 3 **(D)** 4

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta definida por $\begin{cases} x = 2 \\ y = z \end{cases}$

Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?

(A) $x - y - z = 5$ **(B)** $2x + y + z = 5$

(C) $y + z = 5$ **(D)** $y - z = 5$

3. Considere o intervalo $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Qual das equações seguintes **não** tem solução neste intervalo?

(A) $\cos x = -0{,}5$ **(B)** $\operatorname{sen} x = -0{,}5$

(C) $\cos x = -0{,}9$ **(D)** $\operatorname{sen} x = -0{,}9$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$

Considere a função g definida por $g(x)=f(x+a)+k$, com $a\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{R}$

Sabe-se que as retas de equações $x=-2$ e $y=2$ são assíntotas do gráfico de g

Quais são os valores de a e de k ?

(A) $a=1$ e $k=-2$ **(B)** $a=1$ e $k=2$

(C) $a=-1$ e $k=-2$ **(D)** $a=-1$ e $k=2$

5. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- as funções f e g são funções quadráticas
- a função f tem um único zero
- a função g tem dois zeros distintos
- os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto de coordenadas $(3, 0)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\dfrac{g}{f}$ tem dois zeros.

(B) A função $f\times g$ tem dois zeros e a função $\dfrac{g}{f}$ tem um zero.

(C) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\dfrac{g}{f}$ tem dois zeros.

(D) A função $f\times g$ tem três zeros e a função $\dfrac{g}{f}$ tem um zero.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

As retas de equações $x=3$ e $y=-1$ são as assíntotas do gráfico da função f

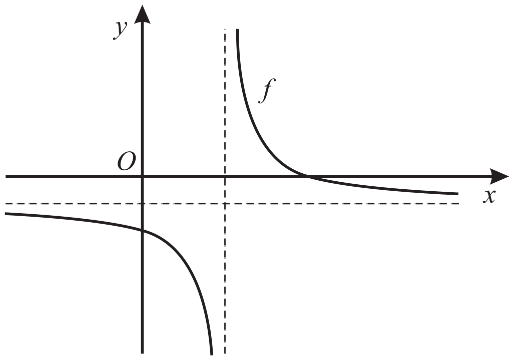

Figura 1

1.1. Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

1.1.1. Qual é o valor de k para o qual a equação $f(x)=k$ é impossível?

1.1.2. Qual é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$?

1.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x)=\dfrac{5-x}{x-3}$

1.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x)\leq\dfrac{2-x}{x+3}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

1.2.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^3$

A equação $(f\circ g)(x)=x$ tem exatamente duas soluções.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto E não está representado na figura).

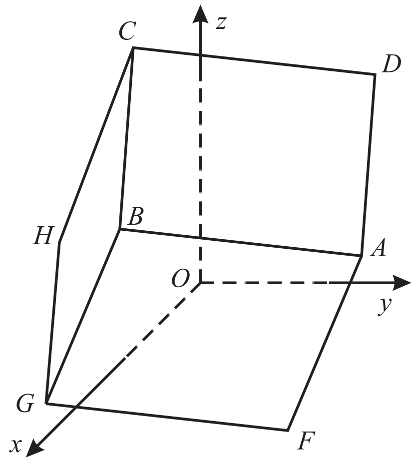

Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto F tem coordenadas $(1, 3, -4)$
- o vetor $\overrightarrow{FG}$ tem coordenadas $(3, -6, 2)$

2.1. Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.

2.1.1. Plano FAD

2.1.2. Reta GF

2.1.3. Superfície esférica de centro no ponto F à qual pertence o ponto A

2.2. Sabe-se ainda que a equação $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ define o plano HCD

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto E (vértice do cubo, não representado na figura).

3. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C

Para cada posição do ponto P, seja R o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja Q o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto R

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

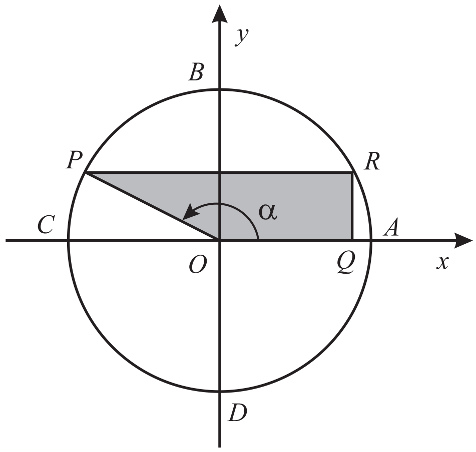

Figura 3

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

3.1. Mostre que a área do trapézio $[OPRQ]$ é dada por $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

3.2. Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{8}{15}$

Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio $[OPRQ]$

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Na Figura 4, está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 8

Admita que o ponto E pertence ao segmento $[AB]$ e que o triângulo $[CBE]$ tem área igual a 24

Determine o valor exato de $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CD}$, sem recorrer à calculadora.

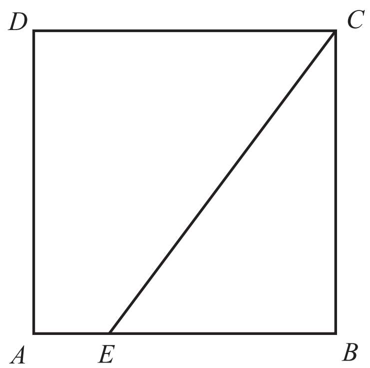

Figura 4

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	
1.1.1.	5 pontos
1.1.2.	5 pontos
1.2.	
1.2.1.	20 pontos
1.2.2.	20 pontos
2.	
2.1.	
2.1.1.	10 pontos
2.1.2.	10 pontos
2.1.3.	10 pontos
2.2.	20 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	20 pontos
4.	15 pontos
	150 pontos

TOTAL .... **200 pontos**