Teste Intermédio

# Matemática A

**Versão 2**

Duração do Teste: 90 minutos | 06.03.2013

**11.º Ano de Escolaridade**

## RESOLUÇÃO

## GRUPO I

**1.** Resposta **(D)**

Os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares se, e só se, $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = 0$

Designemos por $x$ a abcissa do ponto $P$

Então, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são $(x, -5, 1)$

Portanto,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x, -5, 1) \cdot (2, 3, 7) = 0 \Leftrightarrow 2x - 15 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

**2.** Resposta **(C)**

Designemos por $r$ a reta definida por $\begin{cases} x = 2 \\ y = z \end{cases}$

O vetor $\vec{r}\,(0, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta $r$

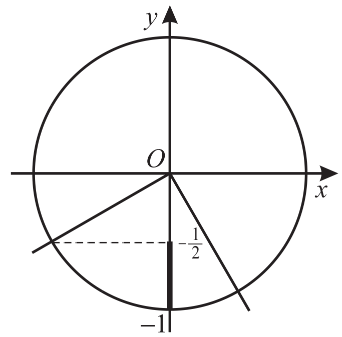
Um plano é perpendicular à reta $r$ se, e só se, o vetor $\vec{r}$ for perpendicular a esse plano.

Portanto, a equação do plano tem de ser equivalente a uma equação da forma $y + z = d$

É o caso do plano definido pela equação $y + z = 5$

**3.** Resposta **(C)**

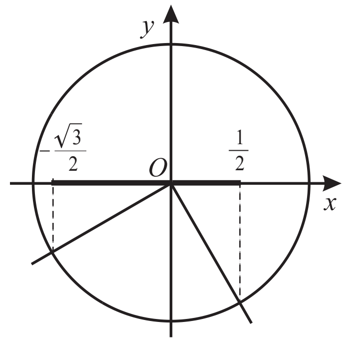
No intervalo $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$, o seno toma todos os valores do intervalo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Portanto, as equações apresentadas nas opções B e D têm solução.




No intervalo $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$, o cosseno toma todos os valores do intervalo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Tem-se $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$

Portanto, só a equação apresentada na opção C não tem solução.




**4.** Resposta **(D)**

As assíntotas do gráfico da função $f$ são as retas de equações $x = -3$ e $y = 0$

Como as assíntotas do gráfico de $g$ são as retas de equações $x = -2$ e $y = 2$, o gráfico de $g$ obtém-se do gráfico de $f$ por meio da translação associada ao vetor de coordenadas $(1, 2)$

Portanto, $a = -1$ e $k = 2$

**5.** Resposta **(B)**

Sabe-se que os gráficos das funções $f$ e $g$ se intersectam no ponto de coordenadas $(3,\ 0)$, ou seja, sabe-se que $f(3) = g(3) = 0$

Portanto, $3$ é um zero comum às duas funções.

A função $g$ tem outro zero, que vamos designar por $a$

Dado que as duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, tem-se que:

- $$\begin{aligned}(f \times g)(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \vee \ g(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ (x = a \vee x = 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ x = a\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 &\Leftrightarrow g(x) = 0 \ \wedge \ f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = a \vee x = 3) \ \wedge \ x \neq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = a\end{aligned}$$

Então,

- a função $f \times g$ tem dois zeros: $a$ e $3$
- a função $\frac{g}{f}$ tem um zero: $a$

## GRUPO II

**1.1.1.** O contradomínio da função $f$ é $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, pelo que a equação $f(x)=k$ é impossível se, e só se, $k=-1$

**1.1.2.** Dado que a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal do gráfico da função $f$, o limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $+\infty$ é igual a $-1$

**1.2.1.** $f(x) \le \dfrac{2-x}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{5-x}{x-3} \le \dfrac{2-x}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{5-x}{x-3} - \dfrac{2-x}{x+3} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5-x)(x+3)-(2-x)(x-3)}{(x-3)(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x+15-x^2-3x-2x+6+x^2-3x}{x^2-9} \le 0 \Leftrightarrow$

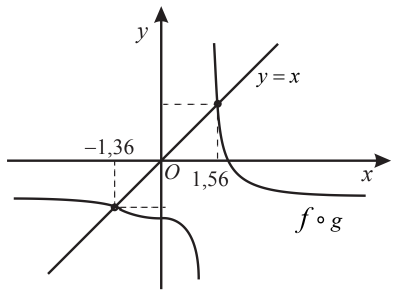
$\Leftrightarrow \dfrac{-3x+21}{x^2-9} \le 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $3$ | | $7$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numerador | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| Denominador | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Fração | $+$ | n.d. | $-$ | n.d. | $+$ | $0$ | $-$ |

n.d. – não definida

Conjunto solução: $]-3, 3[\,\cup\,[7, +\infty[$

**1.2.2.** $(f \circ g)(x) = x \Leftrightarrow f(g(x)) = x \Leftrightarrow f(x^3) = x \Leftrightarrow \dfrac{5-x^3}{x^3-3} = x$




Na figura, estão representados:

- o gráfico da função $f \circ g$, definida pela expressão $\dfrac{5-x^3}{x^3-3}$
- a reta de equação $y = x$
- os pontos de intersecção das duas linhas, cujas abcissas são as soluções da equação $(f \circ g)(x) = x$

Portanto, as soluções da equação $(f \circ g)(x) = x$, arredondadas às centésimas, são $-1{,}36$ e $1{,}56$

**2.1.1.** O vetor $\overrightarrow{FG}$ é perpendicular ao plano $FAD$, pelo que uma equação deste plano é da forma $3x-6y+2z+d=0$

Como o ponto $F$ tem coordenadas $(1, 3, -4)$, tem-se $3\times 1+(-6)\times(3)+2\times(-4)+d=0$

Portanto, $d=23$

Assim, uma condição cartesiana que define o plano $FAD$ é $3x-6y+2z+23=0$

**2.1.2.** Uma condição cartesiana que define a reta $GF$ é $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+4}{2}$

**2.1.3.** A superfície esférica de centro no ponto $F$ à qual pertence o ponto $A$ tem raio igual a $\overline{FG}$

Tem-se $\overline{FG}=\|\overrightarrow{FG}\|=\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{49}=7$

Assim, uma condição cartesiana que define a superfície esférica é $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=49$

**2.2.** O ponto $E$ é o ponto de intersecção da reta $EF$ com o plano $HCD$

Como a reta $EF$ é perpendicular a este plano, que é definido por $6x+2y-3z+25=0$, uma equação vetorial da reta é $(x, y, z)=(1, 3, -4)+k(6, 2, -3),\ k\in\mathbb{R}$

Tem-se $(x, y, z)=(1, 3, -4)+k(6, 2, -3) \Leftrightarrow x=1+6k \ \wedge\ y=3+2k \ \wedge\ z=-4-3k$

Portanto, qualquer ponto da reta $EF$ tem coordenadas da forma $(1+6k, 3+2k, -4-3k)$ , sendo $k$ um número real.

O ponto $E$ é o ponto desta reta cujas coordenadas satisfazem a equação $6x+2y-3z+25=0$

Vem, então,

$6(1+6k)+2(3+2k)-3(-4-3k)+25=0 \Leftrightarrow 6+36k+6+4k+12+9k+25=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k=-49 \Leftrightarrow k=-1$

Portanto, o ponto $E$ é o ponto de coordenadas $(-5, 1, -1)$

**3.1.** A área do trapézio $[OPRQ]$ é dada por $\frac{\overline{PR}+\overline{OQ}}{2}\times\overline{QR}$

As coordenadas do ponto $P$ são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $\cos\alpha<0$ e $\operatorname{sen}\alpha>0$

Portanto,

- $\overline{OQ}=-\cos\alpha$
- $\overline{PR}=-2\cos\alpha$
- $\overline{QR}=\operatorname{sen}\alpha$

Logo, a área do trapézio $[OPRQ]$ é dada por $\frac{-2\cos\alpha+(-\cos\alpha)}{2}\times\operatorname{sen}\alpha$, ou seja, é dada por $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

**3.2.** Afirmar que a reta $OP$ intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\dfrac{8}{15}$ é equivalente a afirmar que $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{8}{15}$

Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se:

$$\left(-\frac{8}{15}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{64}{225} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{289}{225} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{225}{289}$$

Atendendo a que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, tem-se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \times \cos\alpha = -\dfrac{8}{15} \times \left(-\dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{8}{17}$

Portanto, a área pedida é $-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{8}{17} \times \left(-\dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{180}{289}$

**4.** Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{EC}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\overrightarrow{EC}\,\hat{}\,\overrightarrow{CD}\right)$$

Tem-se $\|\overrightarrow{CD}\| = 8$

Como a área do triângulo $[CBE]$ é igual a $24$ e $\overline{BC}$ é igual a $8$, vem:

$$\frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2} = 24 \Leftrightarrow \overline{EB} \times \overline{BC} = 48 \Leftrightarrow \overline{EB} \times 8 = 48 \Leftrightarrow \overline{EB} = 6$$

Assim, $\overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{EC}^2 \Leftrightarrow 6^2 + 8^2 = \overline{EC}^2 \Leftrightarrow \overline{EC} = 10$

Portanto, $\|\overrightarrow{EC}\| = 10$

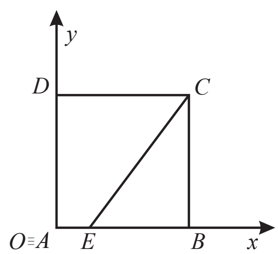
Tem-se ainda:

$$\cos\left(\overrightarrow{EC}\,\hat{}\,\overrightarrow{CD}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{CE}\,\hat{}\,\overrightarrow{CD}\right) = -\cos\left(E\hat{C}D\right) = -\cos\left(C\hat{E}B\right) = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -\frac{3}{5}$$

Logo, $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CD} = 10 \times 8 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -48$

**2.º Processo**

Consideremos um referencial o.n. $xOy$ do plano, em que, como a figura sugere, a origem do referencial coincide com o ponto $A$ e os pontos $B$ e $D$ pertencem aos eixos $Ox$ e $Oy$, respetivamente.




Como a área do triângulo $[CBE]$ é igual a $24$ e $\overline{BC}$ é igual a $8$, vem:

$$\frac{\overline{EB} \times \overline{BC}}{2} = 24 \Leftrightarrow \overline{EB} \times \overline{BC} = 48 \Leftrightarrow \overline{EB} \times 8 = 48 \Leftrightarrow \overline{EB} = 6$$

Tem-se, portanto: $C(8,8)$ $D(0,8)$ $E(2,0)$

Assim, $\overrightarrow{EC} = C - E = (8,8) - (2,0) = (6,8)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (0,8) - (8,8) = (-8,0)$

Vem, então: $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CD} = (6,8) \cdot (-8,0) = -48 + 0 = -48$