

TESTE INTERMÉDIO - 11.º ANO - MATEMÁTICA B

19 de Maio de 2006

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

- 1.1.** A Anabela, ao acrescentar aos 3 litros de sumo, x litros de água, obteve $3 + x$ litros de bebida.

Atendendo a que o sumo de laranja puro já contém 92% de água, 1 litro de sumo contém 0,92 litros de água. Portanto, 3 litros de sumo contém $0,92 \times 3$ litros de água.

A bebida, assim preparada, contém $0,92 \times 3 + x$ litros de água.

A percentagem de água existente na bebida obtida será então dada pela expressão

$$\frac{0,92 \times 3 + x}{3 + x} \times 100 = \frac{100x + 276}{x + 3}$$

- 1.2.** Para que a bebida preparada pela Anabela não tenha mais de 97% de água, o número x de litros de água a acrescentar aos três de litros de sumo deve obedecer à seguinte condição: $\frac{100x + 276}{x + 3} \leq 97$

$$\text{Dado que } x + 3 > 0, \quad \frac{100x + 276}{x + 3} \leq 97 \Leftrightarrow 100x + 276 \leq 97x + 291$$

$$\text{Tem-se agora que } 100x + 276 \leq 97x + 291 \Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Podemos assim concluir que a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar ao sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água, é 5 litros.

- 2.1.** Às zero horas, a diferença entre as distâncias das extremidades dos ponteiros à barra é igual à diferença de comprimento entre eles. Assim, o valor pedido é igual a $m(0) - h(0)$.

$$\begin{aligned} m(0) - h(0) &= \left[1 + \frac{7}{10} \cos\left(\frac{\pi}{1800} \times 0\right) \right] - \left[1 + \frac{5}{10} \cos\left(\frac{\pi}{21600} \times 0\right) \right] = \\ &= \left[1 + \frac{7}{10} \cos(0) \right] - \left[1 + \frac{5}{10} \cos(0) \right] = \left(1 + \frac{7}{10} \right) - \left(1 + \frac{5}{10} \right) = \\ &= \frac{2}{10} = 0,2 \end{aligned}$$

O ponteiro dos minutos tem mais $0,2m$, ou seja, mais $20cm$ do que o ponteiro das horas.

2.2. A função m tem período 3600 se $m(t + 3600) = m(t)$.

$$\begin{aligned} m(t + 3600) &= 1 + \frac{7}{10} \cos \left[\frac{\pi}{1800} (t + 3600) \right] = \\ &= 1 + \frac{7}{10} \cos \left(\frac{\pi}{1800} t + \frac{3600\pi}{1800} \right) = \\ &= 1 + \frac{7}{10} \cos \left(\frac{\pi}{1800} t + 2\pi \right) = \\ &= 1 + \frac{7}{10} \cos \left(\frac{\pi}{1800} t \right) = \\ &= m(t) \end{aligned}$$

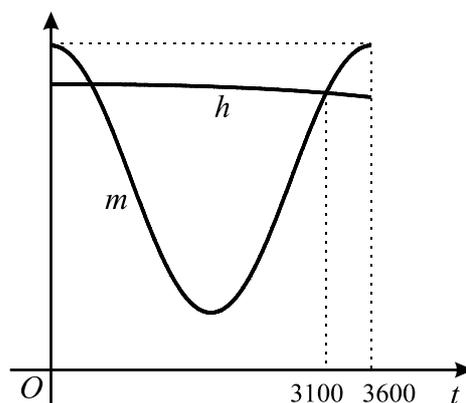
Interpretação: dado que 3600 segundos é 1 hora, pode afirmar-se que, de hora a hora, se repete a distância da extremidade do ponteiro dos minutos à barra. De facto, de hora a hora, a posição do ponteiro dos minutos é a mesma.

2.3.

A recta AB é paralela à barra quando a distância da extremidade do ponteiro dos minutos à barra é igual à distância da extremidade do ponteiro das horas à barra.

Os instantes em que, na primeira hora do dia, essa distância é igual são as soluções da equação $m(t) = h(t)$, no intervalo $[0, 3600]$.

Com o objectivo de resolver graficamente esta equação, obteve-se, na calculadora, o gráfico da função m e o gráfico da função h , no intervalo $[0, 3600]$.



Da observação do gráfico, podemos concluir que, na primeira hora do dia, há dois instantes em que a recta AB é paralela à recta r . O instante pedido ocorre 3100 segundos depois das zero horas, ou seja, às 0h 51m 40s.

3. Tem-se, sucessivamente:

$$\text{Área do quadrado sombreado: } x^2$$

$$\text{Diâmetro do círculo: } 1 - x$$

$$\text{Raio do círculo: } \frac{1-x}{2}$$

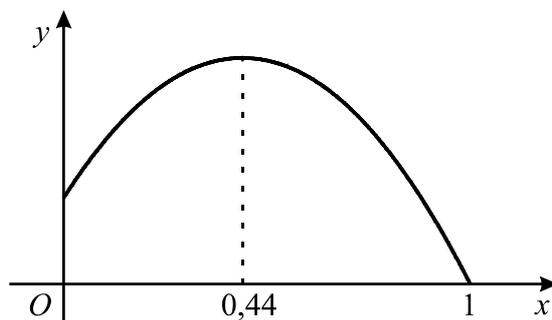
$$\text{Área do círculo: } \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2$$

$$\text{Área da região sombreada: } x^2 + \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2$$

$$\text{Área da região branca: } 1 - \left[x^2 + \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 \right]$$

Com o objectivo de encontrar o valor de x para o qual a área da região branca é máxima, obteve-se na calculadora o gráfico da função de domínio $]0, 1[$ definida por

$$1 - \left[x^2 + \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 \right]$$



Concluimos que o valor de x para o qual a área da região branca é máxima é 0,44.