Teste Intermédio

Matemática B

Duração do Teste: 90 minutos | 26.05.2010

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango:

$$\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

Trapézio:

$$\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

Polígono regular:

Semiperímetro × Apótema

Sector circular:

$$\frac{\alpha\, r^2}{2}$$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi\, r\, g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica:
$4\,\pi\, r^2$ (*r – raio*)

Área lateral de um cilindro recto:
$2\,\pi\, r\, g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base × Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base × Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (*r – raio*)

Cilindro: *Área da base × Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então:

- média de X:

$$\mu = p_1\, x_1 + \ldots + p_n\, x_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

GRUPO I

Num jogo realizado no Clube de Matemática de uma escola, cada participante recebe um conjunto de 15 problemas, do Problema Um ao Problema Quinze. Os problemas podem ser resolvidos por qualquer ordem.

Considere que:

- à resolução incorrecta ou à ausência de resolução de cada problema são atribuídos 0 pontos;
- à resolução correcta do *Problema Um* é atribuído 1 ponto;
- à resolução correcta do *Problema Dois* são atribuídos 2 pontos;
- à resolução correcta do *Problema Três* são atribuídos 4 pontos;
- e assim sucessivamente, duplicando sempre a pontuação, até ao *Problema Quinze*.

1. A Ana foi uma das participantes no jogo.

Resolveu, correctamente, todos os problemas com numeração ímpar, e não resolveu, correctamente, qualquer problema com numeração par.

Determine a pontuação total obtida pela Ana.

2. A Rita foi outra das participantes no jogo e obteve um total de 47 pontos.

Quais foram os problemas que a Rita resolveu, correctamente, do conjunto dos 15 problemas do jogo?

Justifique a sua resposta.

Se recorrer a um método de tentativa e erro, deve apresentar as tentativas que efectuar.

GRUPO II

Um laboratório está a ensaiar duas formulações, a formulação A e a formulação B, de um mesmo medicamento, o ZITEX.

Admita que:

- na formulação A, a concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a um paciente, é dada por

$$a(t) = \frac{12t+1}{(t+1)^2} - 1 \qquad \text{com} \quad t \in [0,\ 10]$$

- na formulação B, para a mesma quantidade de medicamento, a concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a um paciente, é dada por

$$b(t) = \frac{36t+1{,}5}{(2t+1)^2} - 1{,}5 \qquad \text{com} \quad t \in [0,\ 5]$$

- em ambas as formulações, a concentração mínima necessária, para que o ZITEX produza efeito, é $1{,}5$ miligramas por litro $(\mathrm{mg/l})$ de sangue.

1. É aconselhável que um medicamento com as características do ZITEX comece a produzir efeito, no máximo, 15 minutos após ter sido administrado a um paciente e que esse efeito se mantenha durante, pelo menos, 2 horas.

Averigúe se cada uma das formulações, A e B, do ZITEX satisfaz as condições referidas.

Fundamente a sua resposta, com base nas representações gráficas das funções a e b

Apresente o tempo de duração do efeito do ZITEX, em horas, arredondado às décimas, em cada uma das formulações.

Utilize valores arredondados às décimas para as abcissas dos pontos que considerar relevantes.

2. O ZITEX, na formulação A, foi administrado a um paciente às 8 horas da manhã de um certo dia.

2.1. Determine a que horas desse dia, já depois de o medicamento ter deixado de produzir efeito, é que o valor da concentração de ZITEX, em miligramas por litro de sangue, foi igual a 50% do valor da concentração máxima.

Apresente a sua resposta em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, utilize sempre valores arredondados com quatro casas decimais.

2.2. Verifica-se que o valor da taxa de variação da função a, no instante $t = 1{,}25$, é aproximadamente igual a $-0{,}44 \text{ mg/l}\big/\text{h}.$

Interprete, na situação descrita, a afirmação anterior, explicitando:

- o instante do dia, em horas e minutos, a que corresponde o valor $t = 1{,}25$;
- o significado do sinal do valor da taxa de variação;
- as unidades de medida da taxa de variação.

GRUPO III

Em temas como a natalidade e a hereditariedade, recorre-se, frequentemente, à aplicação de modelos de probabilidade, para estudar as dinâmicas e as características das populações.

1. Um biólogo efectuou vários estudos sobre a natalidade, numa dada região de Portugal.

Num dos estudos efectuados, apenas considerou a população constituída pelas 2675 mulheres, dessa região do país, que foram mães, pela primeira vez, no ano de 2009.

De acordo com o estudo, o biólogo concluiu que a idade, X, em anos, no momento do parto, das mulheres, dessa população, segue, aproximadamente, a distribuição normal $N(27,\ 4)$, de valor médio $\mu \approx 27$ anos e de desvio padrão $\sigma \approx 4$ anos.

Estime o número de mulheres, dessa população, que, no momento em que foram mães, pela primeira vez, tinham idade inferior ou igual a 20 anos.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Na sua resposta, deve incluir a apresentação das instruções que utilizar na calculadora, relativas à distribuição normal.

2. A cor dos olhos de um indivíduo é determinada pela acção conjunta de vários genes. Esses genes são herdados do pai e da mãe.

Um determinado casal, em que tanto o homem como a mulher têm olhos castanhos, pretende ter dois filhos biológicos.

Admita que a probabilidade de qualquer filho, desse casal, ter olhos castanhos é igual a $\frac{3}{4}$, e que a probabilidade de ter olhos azuis é igual a $\frac{1}{4}$.

Seja Y a variável aleatória: «número de indivíduos com olhos azuis, de entre os dois filhos biológicos desse casal».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y

Apresente os valores das probabilidades em forma de dízima, com duas casas decimais.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize duas casas decimais.

GRUPO IV

Uma médica pediatra, no âmbito da sua actividade profissional, regista, periodicamente, dados biométricos, como, por exemplo, a altura de cada uma das crianças a quem presta cuidados de saúde.

O Filipe e o Guilherme são dois irmãos que, durante alguns anos, foram acompanhados por esta médica, nas consultas de pediatria. O Filipe é o irmão mais velho.

De acordo com os dados recolhidos pela médica, constatou-se que:

- existem vários registos dos valores da altura do Filipe, desde o dia 1 de Julho de 2003 até ao dia 1 de Julho de 2008, inclusive;
- existem vários registos dos valores da altura do Guilherme, desde o dia 1 de Julho de 2004 até ao dia 2 de Julho de 2009, inclusive;
- no dia 1 de Julho de 2004, o Guilherme tinha menos $8\ cm$ de altura do que tinha o Filipe em 1 de Julho de 2003.

Admita que, de acordo com os dados recolhidos, a altura, em cm, do Filipe, entre os dias 1 de Julho de 2003 e 1 de Julho de 2008, inclusive, é dada, aproximadamente, pela função F, definida por

$$F(t) = 76{,}62 + 5{,}11\ t + 9{,}22\ \ln(t + 1{,}25) \qquad \text{com } 0 \leq t \leq 5$$

A variável t representa o tempo decorrido, em anos, desde o dia 1 de Julho de 2003.

1. Determine o crescimento médio do Filipe, durante os dois primeiros anos.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, nos arredondamentos que efectuar, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

2. Considere G a função que, de acordo com os dados recolhidos, dá, aproximadamente, a altura, em cm, do Guilherme, entre 1 de Julho de 2004 e 2 de Julho de 2009, inclusive.

Admita que a função G pode ser definida, a partir da função F, por

$$G(t) = F(t + c) + d \qquad \text{com} \quad 1 \leq t \leq 6$$

A variável t representa o tempo decorrido, em anos, desde o dia 1 de Julho de 2003.
As letras c e d representam parâmetros constantes.

Na figura 1, estão representados, no mesmo referencial, os gráficos das funções F e G

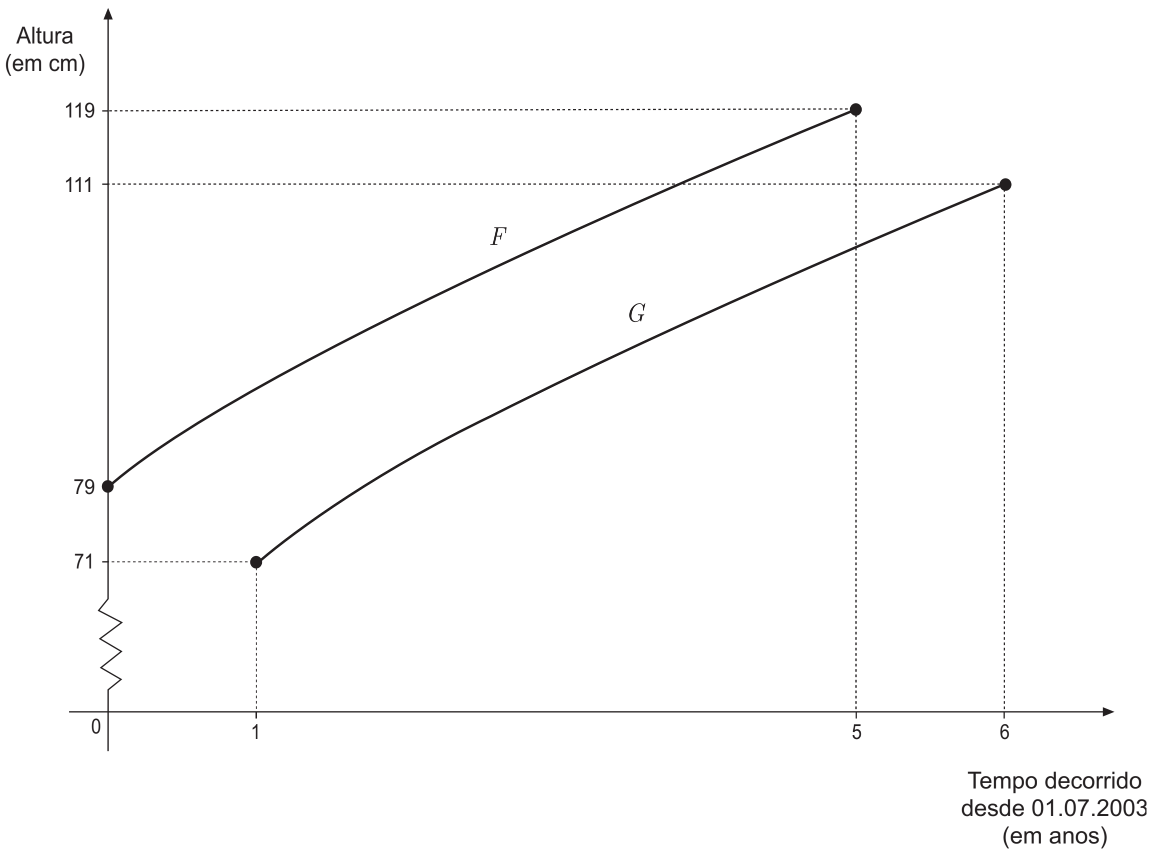

Figura 1

Indique, justificando, o valor de cada um dos parâmetros c e d.

Na justificação da sua resposta, refira como, a partir do gráfico de F, se pode obter o gráfico de G, utilizando propriedades das transformações de funções.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	20 pontos
2.	20 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	35 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	25 pontos
	80 pontos

GRUPO III

1.	15 pontos
2.	25 pontos
	40 pontos

GRUPO IV

1.	15 pontos
2.	25 pontos
	40 pontos

TOTAL .... **200 pontos**