TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA B

11.º ANO

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1.

1.º Exemplo:

A Ana obteve zero pontos nos problemas com numeração par.
As pontuações obtidas pela Ana nos problemas com numeração ímpar, consideradas pela mesma ordem de numeração dos problemas, formam uma sequência de oito termos consecutivos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 4. Logo, a soma destes oito termos é tal que:

$$1\times\frac{1-4^8}{1-4}=\frac{1-65536}{-3}=\frac{65535}{3}=21845$$

2.º Exemplo:
Podemos organizar a pontuação obtida pela Ana numa tabela.

Número do Problema	Pontos obtidos pela Ana
1	1
2	0
3	4
4	0
5	16
6	0
7	64
8	0
9	256
10	0
11	1024
12	0
13	4096
14	0
15	16384

A soma dos pontos é 21845

2.

1.º Exemplo:

Vejamos os problemas a cujas respostas correctas são atribuíveis pontuações inferiores ou iguais a 47 pontos:

Número do Problema	Pontos atribuíveis às respostas correctas
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32

Portanto, a Rita não resolveu correctamente nenhum problema com numeração superior a 6
A soma das pontuações dos primeiros seis problemas é tal que 1+2+4+8+16+32=63
Como a Rita obteve 47 pontos, concluímos que há 63-47=16 pontos a mais. Assim, ela não resolveu correctamente o *Problema Cinco*. Por conseguinte, a Rita resolveu correctamente apenas os problemas números: 1, 2, 3, 4 e 6

2.º Exemplo:

Podemos organizar os pontos atribuíveis às respostas correctas:

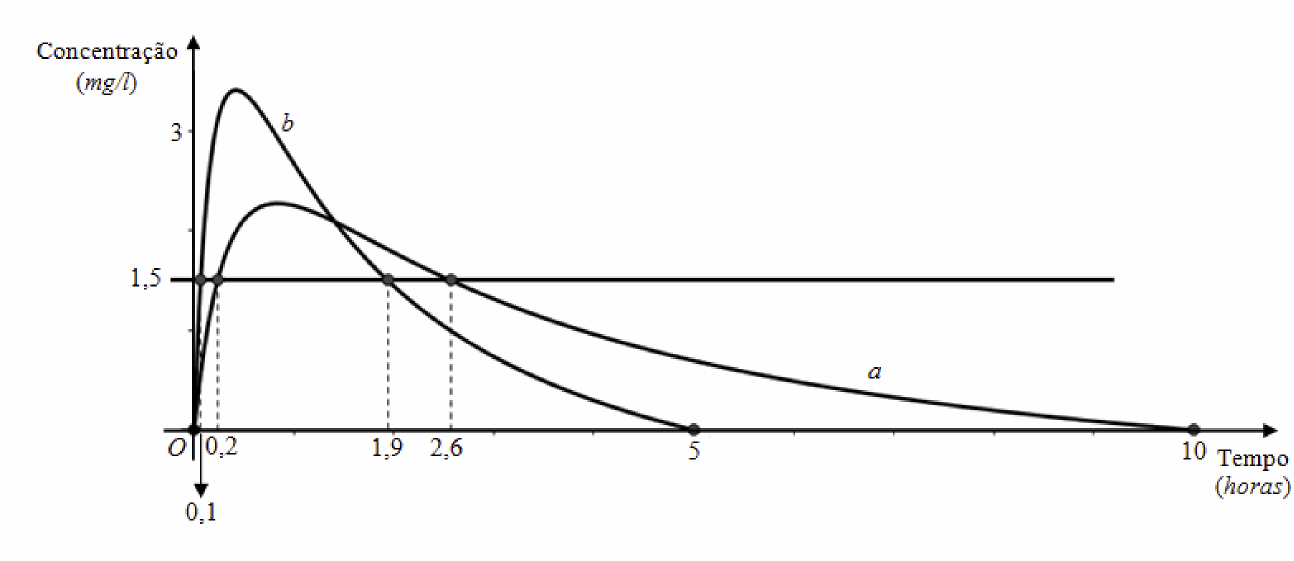
Número do Problema	Pontos atribuíveis às respostas correctas
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024
12	2048
13	4096
14	8192
15	16384

Como a Rita obteve 47 pontos, verificamos que não resolveu correctamente nenhum problema com numeração superior a 6, porque esses problemas têm pontuações superiores a 47. A Rita resolveu correctamente o *Problema Seis*, porque, se assim não fosse, não poderia obter um total de 47 pontos. De facto, a soma das pontuações dos primeiros 5 problemas é menor do que 47, porque $1+2+4+8+16=31$. Portanto, com a resolução do *Problema Seis* obteve 32 pontos. Ainda obteve mais 15 pontos, pois 47-32=15. Como a pontuação do *Problema Cinco* é 16, concluímos que a Rita não fez o *Problema Cinco*. Mas, então, a Rita fez os primeiros quatro problemas, porque a soma das suas pontuações é 15. Por conseguinte, a Rita resolveu correctamente apenas os problemas números: 1, 2, 3, 4 e 6

GRUPO II

1.

Na figura seguinte, estão representadas graficamente as funções a e b, nos respectivos domínios, e a recta de equação $y = 1{,}5$.



Estão assinalados, na figura, os pontos de intersecção do gráfico de a com a recta de equação $y = 1{,}5$, cujas abcissas são, aproximadamente, $0{,}2$ e $2{,}6$ e também estão assinalados os pontos de intersecção do gráfico de b com a mesma recta, cujas abcissas são, aproximadamente, $0{,}1$ e $1{,}9$

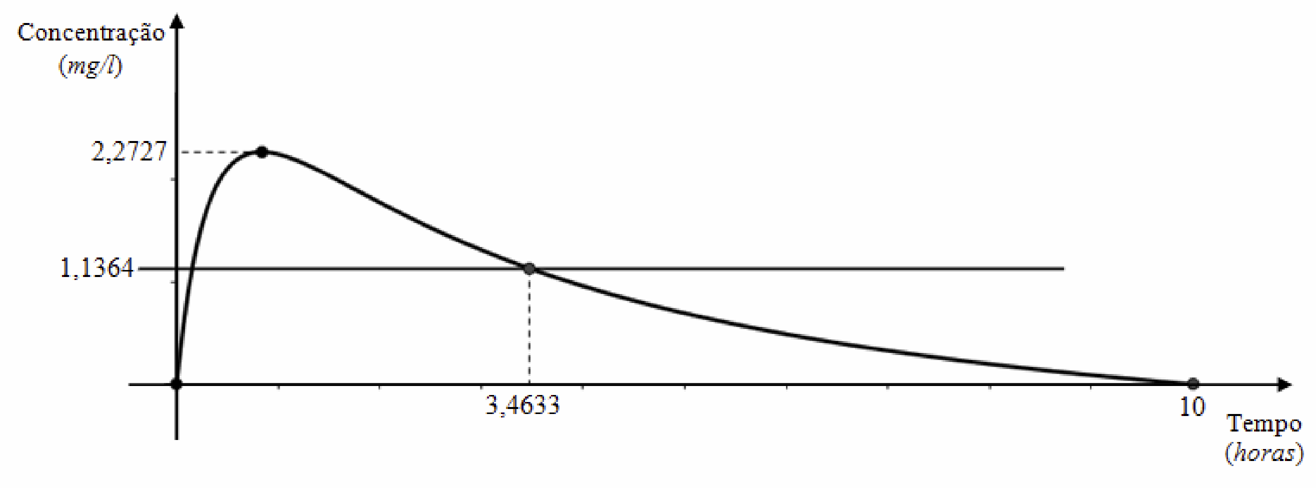
Por análise dos gráficos e tendo em consideração os valores das abcissas acima referidos, podemos concluir que:

- o ZITEX demora menos do que 15 minutos a começar a fazer efeito, em ambas as formulações: 12 minutos $(0{,}2 \times 60)$ na formulação A e 6 minutos $(0{,}1 \times 60)$ na formulação B ;
- o tempo de duração do efeito do ZITEX, na formulação A, é de 2,4 horas, aproximadamente;
- o tempo de duração do efeito do ZITEX, na formulação B, é de 1,8 horas, aproximadamente.

Portanto, o ZITEX só verifica as condições referidas, na formulação A, uma vez que o tempo de duração do efeito na formulação B é inferior a 2 horas.

2.

2.1.
Na figura seguinte, está representada graficamente a função a.



No gráfico de a, assinalou-se o ponto correspondente ao máximo da função, de ordenada 2,2727.

Assim, o valor máximo que a concentração atingiu durante o período do efeito do medicamento foi de 2,2727 *mg/l*.

O valor correspondente a 50% da concentração máxima é: $2{,}2727 \times 0{,}5 = 1{,}1364$ *mg/l.*

Na figura está também representada graficamente a recta de equação $y = 1{,}1364$ e assinalado um dos pontos de intersecção desta recta com o gráfico de a, cuja abcissa é 3,4633. O ponto de intersecção de abcissa menor, não assinalado, não é relevante para a resolução do problema, uma vez que, no instante correspondente, o medicamento ainda não tinha deixado de fazer efeito.

Portanto, o valor pedido corresponde a 3,4633 horas decorridas desde as 8h da manhã, instante em que o medicamento foi administrado ao paciente, ou seja, 11 horas e 28 minutos ($0{,}4633 \times 60 = 27{,}798$ min ≈ 28 min) .

2.2. Na situação descrita, o instante $t = 1{,}25$ corresponde às 9h15min do dia, porque o medicamento foi administrado ao paciente às 8h da manhã e tendo-se em conta que 0,25 horas são 15 minutos ($0{,}25\times60=15$). O valor $-0{,}44$ corresponde a uma taxa instantânea negativa, o que significa que está a acontecer, nesse instante, uma diminuição de concentração por hora. Portanto, uma interpretação da afirmação do enunciado pode ser a seguinte:
A concentração de ZITEX, às 9 horas e 15 minutos desse dia, estava a diminuir cerca de 0,44 miligramas por litro de sangue por hora.

GRUPO III

1.

Com a máquina calculadora, obtemos $P(X \leq 20) \approx 0{,}04$ (a instrução usada na máquina de calcular deve ser apresentada; neste exemplo de resposta não é apresentada, pois depende da máquina calculadora utilizada).
Como a população é de 2675 elementos, concluímos que o valor pedido é tal que: $2675 \times 0{,}04 = 107$

2.

Seja :

- A_1 o acontecimento: «o primeiro filho do casal tem olhos azuis»
- A_2 o acontecimento: «o segundo filho do casal tem olhos azuis»

Consideremos uma tabela de dupla entrada com todos os casos possíveis e respectivas probabilidades:

	A_2	$\overline{A_2}$
A_1	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$
$\overline{A_1}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

Constatamos que o número possível de filhos do casal, de entre os dois, com olhos azuis é 0, 1 e 2.
Assim, a tabela de distribuição de probablidades da variável aleatória *Y*, com os valores das probablidades apresentados em forma de dízima, com duas casas decimais, é a seguinte:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,56	0,38	0,06

GRUPO IV

1. O crescimento médio do Filipe durante os dois primeiros anos é dado pela taxa de variação média da função F no intervalo $[0, 2]$.
Esse valor, arredondado às décimas, é dado por:

$$tvm\, F\big|_{[0,\,2]} = \frac{F(2) - F(0)}{2-0} = \frac{97{,}71 - 78{,}68}{2} = 9{,}5$$

Assim, o crescimento médio do Filipe nos dois primeiros anos foi de 9,5 *cm*/ano.

2. Temos $c = -1$ e $d = -8$
Na expressão $F(t+c)+d$ os valores do parâmetro *c* respeitam a translações do gráfico da função F paralelas ao eixo das abcissas (movimentos horizontais). Os valores do parâmetro *d* respeitam a translações do gráfico da função F paralelas ao eixo das ordenadas (movimentos verticais).
Assim, o gráfico da função *G* pode ser obtido do gráfico da função *F* , fazendo um movimento horizontal de uma unidade para a direita e um movimento vertical de oito unidades para baixo.