

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 90 min + 30 min de tolerância
1997

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

I

Para cada uma das nove questões deste grupo, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. Cotação: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Uma função real de variável real f é tal que $f(0) = 1$.
Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f :

(A) $\frac{x+2}{x-1}$

(B) $\frac{\ln x}{x+1}$

(C) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $2^{\operatorname{sen} x}$

2. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = x^5 - x + 1$.
O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

(A) $] -1, 0[$

(B) $] 0, 1[$

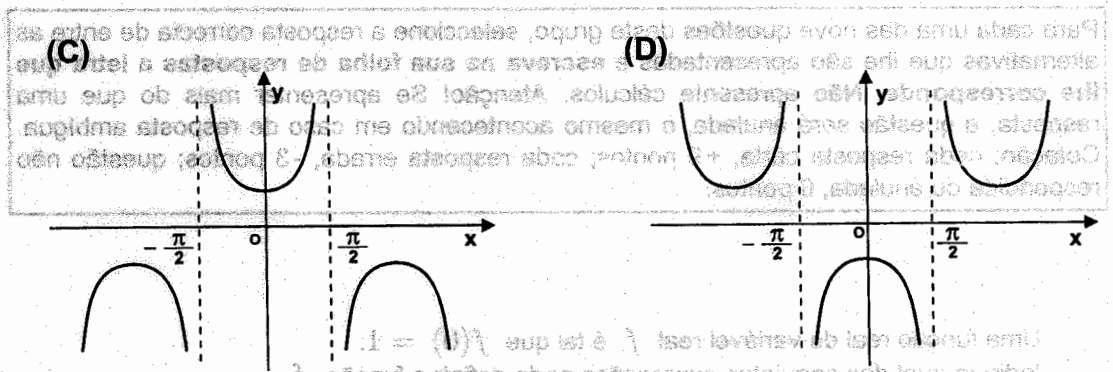
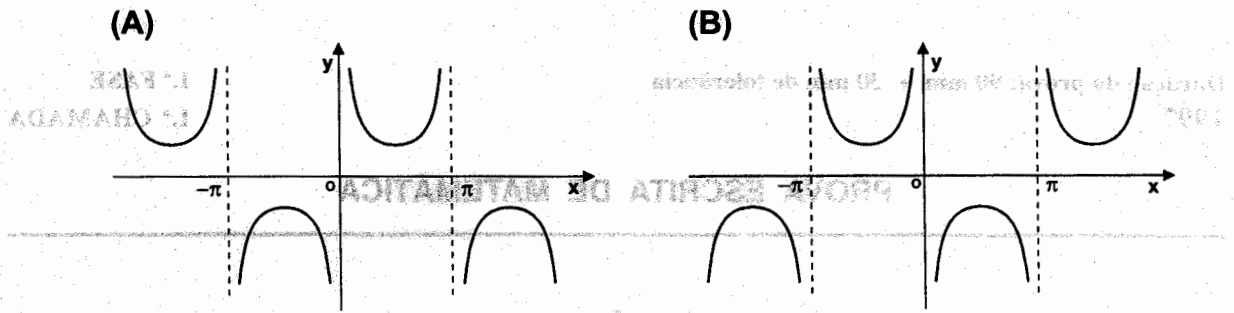
(C) $] 1, 2[$

(D) $] 2, 3[$

V.S.F.F.

135/1

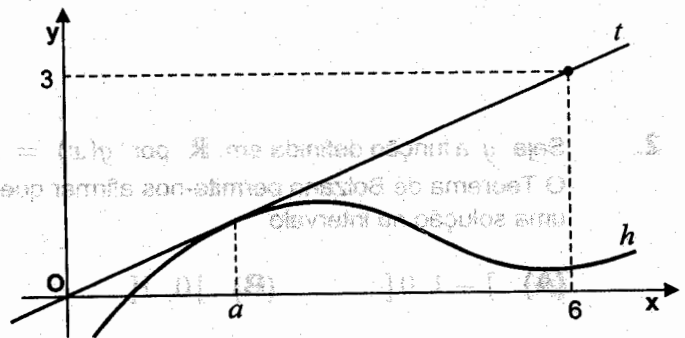
3. Indique qual das seguintes figuras pode ser parte da representação gráfica da função definida por $s(x) = \frac{1}{\sin x}$



4. Na figura junta está a representação gráfica de uma função h e de uma recta t , tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa a .

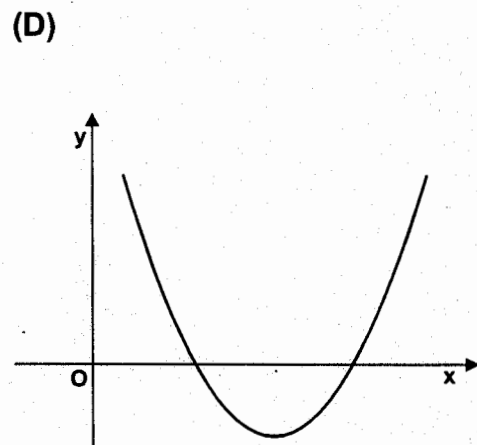
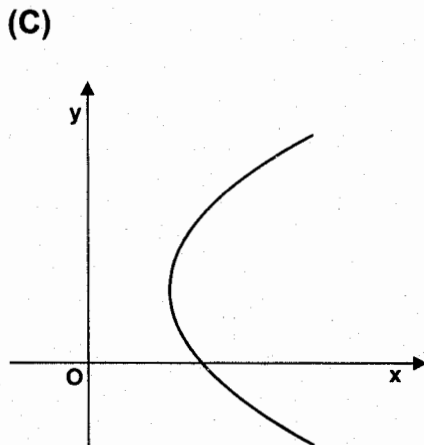
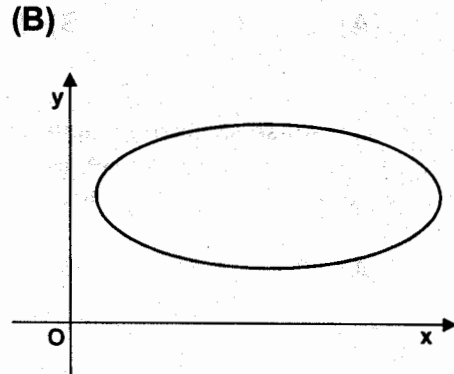
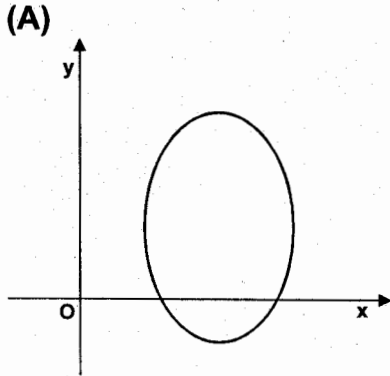
A recta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas $(6, 3)$.

O valor de $h'(a)$ é



- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. Indique qual das figuras seguintes pode representar o lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta de equação $x = 1$ e do ponto de coordenadas $(5, 3)$.



6. Num referencial o. n. $Oxyz$, o ponto de intersecção da recta $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ com o plano xOz tem coordenadas

- (A) $(-1, 2, 0)$ (B) $(1, 0, 2)$ (C) $(1, 0, 6)$ (D) $(3, 0, 6)$

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha : x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \beta : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

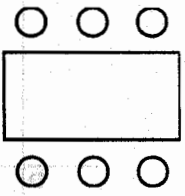
Os planos α e β são

- (A) coincidentes (B) estritamente paralelos
(C) concorrentes não perpendiculares (D) perpendiculares

8. Considere todos os números pares com cinco algarismos. Quantos destes números têm quatro algarismos ímpares?
- (A) $5 \times {}^5C_4$ (B) 5^5 (C) $5!$ (D) $5 \times {}^5A_4$
9. Lançam-se simultaneamente dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e multiplicam-se os dois números saídos. A probabilidade do acontecimento "o produto dos números saídos é 21" é
- (A) 0 (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{21}{36}$

Nas questões dos grupos II e III, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

II

1. Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como esquematizado na figura junta. Determine a probabilidade de dois desses amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados em frente um do outro.
- 
2. Na pastelaria acima referida a temperatura ambiente é constante. Admita que a temperatura, em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria, t minutos após ter sido colocado na chávena, é dada por
- $$f(t) = 20 + 50e^{-0,04t}, \quad t \in [0, +\infty[\quad (e \text{ designa o número de Neper})$$
- a) Determine a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.
- b) Estude a função f quanto à existência de assíptotas, à monotonia e ao sentido das concavidades. Esboce o gráfico de f .
- c) Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indique, justificando, a temperatura ambiente.
- d) Justifique a seguinte afirmação: **a taxa de variação média da função f , em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa.**
- e) Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus centígrados? Apresente o resultado em minutos e segundos. (Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo três casas decimais.)

III

Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o representado na figura junta.

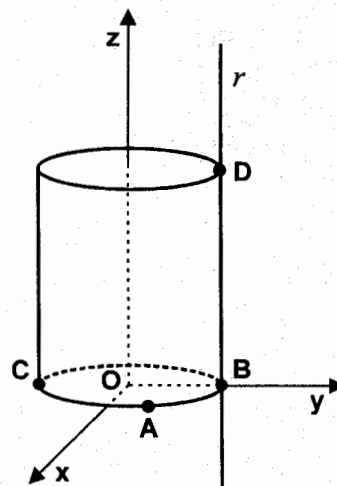
A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy .

$[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy . O ponto C tem coordenadas $(0, -5, 0)$.

O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4, 3, 0)$.

A recta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz .

O ponto D pertence à recta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.



- a) Justifique que a recta AC é perpendicular à recta AB .
- b) Escreva uma equação vectorial da recta r .
- c) Justifique que \vec{AC} é um vector perpendicular ao plano ABD .
Determine uma equação deste plano.
- d) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD , mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\pi \operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
Determine $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha)$ e interprete o resultado obtido.

$$\text{Volume do Cilindro} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

FIM

V.S.F.F.

135/5

COTAÇÕES

GRUPO I	81
GRUPO II	73
1	20
2	53
a)	5
b)	20
c)	7
d)	7
e)	14
GRUPO III	46
a)	6
b)	8
c)	14
d)	18
TOTAL	200

NOTA: Grupo I (escolha múltipla)

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

PONTO 135/C