EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª FASE**
1998 | **2.ª CHAMADA**
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta, de entre as alternativas que lhe são apresentadas, e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.** Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. Considere a função f definida por $f(x) = sen(x^2)$

Indique qual das expressões seguintes define f', função derivada de f

(A) $2x \,.\, cos\,(x^2)$ **(B)** $cos\,(x^2)$

(C) $2x \,.\, cos\,(2\,x)$ **(D)** $-\,cos\,(x^2)$

2. Considere a função g definida por $g(x) = \dfrac{2\,x-5}{x-1}$

Indique qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

(A) 0 **(B)** 2

(C) $-\infty$ **(D)** $+\infty$

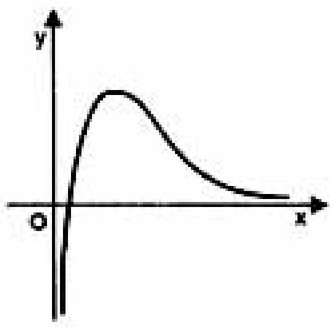
V.S.F.F.

3. De uma função h sabe-se que:

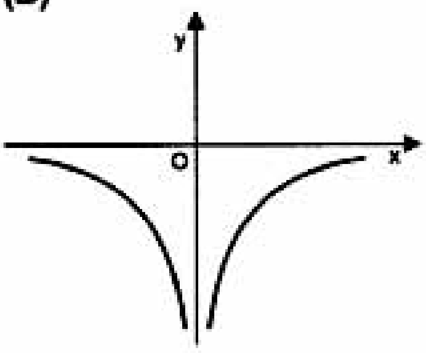
o domínio de h é $\mathbb{R}^+$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = -\infty$

Indique qual dos gráficos seguintes poderá ser o gráfico de h.

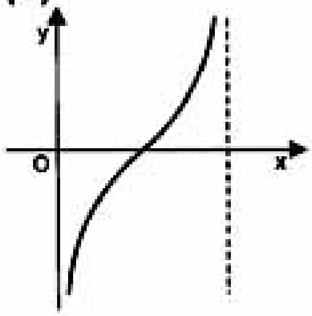
(A)



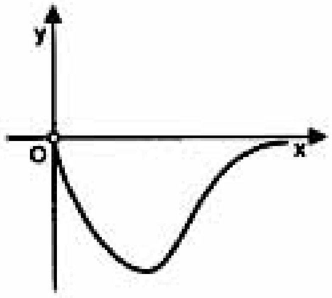
(B)



(C)



(D)

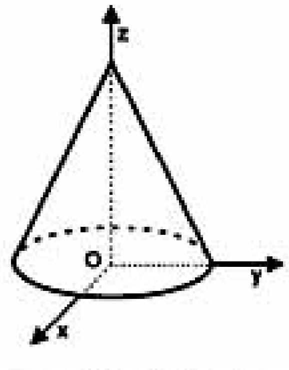


4. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade.
Um cliente desse banco fez um depósito de 100 contos, nessa modalidade.
Qual é, em contos, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados n anos?

(A) $100 + 0,8\,n$ **(B)** $100 \times 1,08\,n$ **(C)** $100 \times 1,8^n$ **(D)** $100 \times 1,08^n$

5. Na figura está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, um cone de revolução.

- A base do cone está contida no plano xOy
- O centro da base é a origem do referencial
- O raio da base tem 5 unidades de comprimento
- O vértice do cone pertence ao eixo Oz

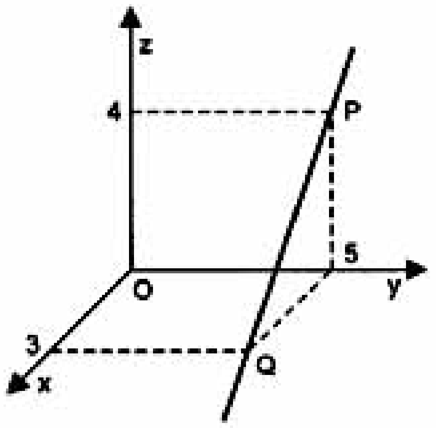


A intersecção do plano definido pela condição $x = 3$ com a superfície lateral do cone é

(A) uma elipse. **(B)** parte de uma parábola.
(C) parte de uma hipérbole. **(D)** um par de segmentos de recta.

6. Na figura está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma recta PQ.

- O ponto P pertence ao plano yOz
- O ponto Q pertence ao plano xOy



Indique qual das condições seguintes define a recta PQ

(A) $3x + 5y + 4z = 0$

(B) $(x, y, z) = (3, 0, -4) + k(3, 5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 4$

(D) $(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(3, 0, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$:
- o plano α, de equação $2x + 2y + 2z = 5$
- a recta r, definida pela condição $x = y = z$

Qual é a posição relativa da recta r e do plano α ?

(A) r é perpendicular a α
(B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares
(C) r é estritamente paralela a α
(D) r está contida em α

8. Lançou-se três vezes ao ar uma moeda equilibrada, tendo saído sempre a face *coroa*. Qual é a probabilidade de, num quarto lançamento, sair a face *cara* ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

9. Indique qual das equações seguintes é equivalente à equação $(x+1)^4 = 4x^3 + 6x^2$

(A) $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ **(B)** $x^4 + 1 = 0$
(C) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ **(D)** $x^4 + 4x + 1 = 0$

V.S.F.F.

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias. Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. De uma certa função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que:

- $f(1) = 0$
- a sua **derivada**, f', é definida por $f'(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

a) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Poderá concluir-se que f é contínua para $x = 1$? Justifique a sua resposta.

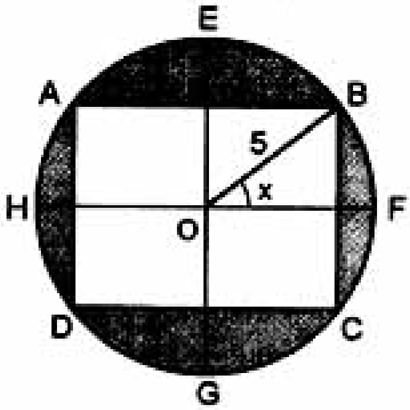
c) Mostre que $f''(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ e estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

2. A figura abaixo representa um canteiro de forma circular com $5\,m$ de raio.
O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura estão também assinalados:

- dois diâmetros da circunferência, $[EG]$ e $[HF]$, que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo
- o centro O da circunferência
- o ângulo BOF, de amplitude x $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



a) Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada, em função de x, por

$$g(x) = 25\pi - 50\, sen\,(2x)$$

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$ para o qual a área da zona relvada é $30\,m^2$

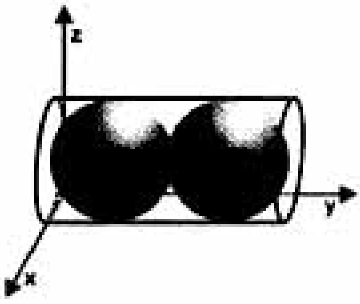
3. O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.

a) Quantos códigos diferentes existem com um e só um algarismo zero?

b) Imagine que um amigo seu vai adquirir um cartão multibanco.
Admitindo que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter os quatro algarismos diferentes?
Apresente o resultado na forma de dízima.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.
A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

- O cilindro tem uma das bases no plano xOz
- O centro dessa base é o ponto de coordenadas $(3,\ 0,\ 3)$
- A outra base está contida no plano de equação $y = 12$
- As bolas são esferas de raio igual a 3
- Os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais



a) Justifique que a superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano xOz tem centro no ponto $(3,\ 9,\ 3)$ e que o ponto $(1,\ 8,\ 1)$ pertence a essa superfície esférica.

b) Escreva uma equação do plano tangente, no ponto $(1,\ 8,\ 1)$, à superfície esférica referida na alínea anterior.

Nota: um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio relativo ao ponto de tangência.

c) **Considere agora a caixa vazia.** Seccionou-se a caixa pelo plano de equação $z = 4$.
Supondo que a unidade do referencial é o centímetro, determine o perímetro da secção obtida.

Formulário

$sen(2x) = 2 \,.\, sen\, x \,.\, cos\, x$ $\qquad$ $cos\,(2x) = cos^2 x - sen^2 x$ $\qquad$ $tg(2x) = \frac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x}$

FIM

V.S.F.F.

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **81**

Cada questão certa .... +9
Cada questão errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 35
a) 12
b).. 8
c).. 15

2 22
a) 12
b).. 10

3 22
a) 10
b).. 12

4 40
a) 14
b).. 14
c).. 12

TOTAL **200**