EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
1998

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada questão certa .... +9
Cada questão errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 41
- a) 15
- b)... 12
- c)... 14

2 22
- a) 10
- b)... 12

3 20

4 36
- a) 12
- b)... 12
- c)... 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Se o examinando transcrever letras correspondentes às duas versões da prova, a cotação desta primeira parte será zero.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	D	B	A	A	D	C	B	D	A
Versão 2	G	E	E	H	E	E	H	G	F

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.
O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.
Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.

a).. 15

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\overline{AD} = \frac{1}{tg\,x}$ 4

$\overline{AC} = 2 + \frac{2}{tg\,x}$ 2

$\overline{BI} = 1 + tg\,x$ 4

Área do triângulo $[ABC] = \frac{\left(2+\frac{2}{tg\,x}\right)(1+tg\,x)}{2}$ 2

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}$ 3

2.º Processo

$\overline{AD} = \frac{1}{tg\,x}$ 4

Área do triângulo $[ADE] = \frac{1}{2\,tg\,x}$ 2

$\overline{BH} = tg\,x$ 3

Área do triângulo $[BEF] = tg\,x$ 2

Área do rectângulo $[DEFG] = 2$ 1

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + 2 \times \frac{1}{2\,tg\,x}$ 2

Área do triângulo $[ABC] = 2 + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}$ 1

Nota: apesar de não fazer parte do programa, o examinando poderá utilizar a função *co-tangente*.

b)..12

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{\frac{-1}{cos^2 x}}{tg^2 x}$$ 4

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$$ 3

$$f'(x) = \frac{sen^2 x - cos^2 x}{sen^2 x \, . \, cos^2 x}$$ 2

$$f'(x) = - \frac{cos^2 x - sen^2 x}{sen^2 x \, . \, cos^2 x}$$ 2

$$f'(x) = - \frac{cos\,(2x)}{sen^2 x \, . \, cos^2 x}$$ 1

Nota 1: na sequência do que se disse na nota da alínea anterior, o examinando poderá identificar $\frac{1}{tg\, x}$ com $cotg\, x$ e obter a derivada de $\frac{1}{tg\, x}$ como a derivada de $cotg\, x$, que poderá conhecer. Portanto, o examinando poderá omitir o primeiro passo previsto nestes critérios e escrever directamente $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$. A cotação a atribuir a este passo é de 7 pontos.

Nota 2: o examinando poderá começar por escrever $f(x) = 2 + \frac{sen\, x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{sen\, x}$ e obter f' a partir desta expressão de f. A distribuição das cotações deverá ser, neste caso, idêntica à que foi discriminada acima.

Nota 3: o examinando poderá, em qualquer momento da sua resolução, abandonar a simplificação da expressão da derivada de f e aproveitar o facto do resultado final ser fornecido para igualar a $-\frac{cos\,(2x)}{sen^2 x \, . \, cos^2 x}$ a expressão por si obtida, provando depois a identidade que daí resultar. Caberá ao corrector adaptar o desdobramento das cotações a cada caso que encontrar. A título de exemplo, apresentamos seguidamente uma resolução deste tipo com o respectivo desdobramento das cotações:

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x}$$ 7

$$\frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sen^2 x} = - \frac{cos\,(2x)}{sen^2 x \, . \, cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow sen^2 x - cos^2 x = - cos\,(2x)$$ 3

$$\Leftrightarrow cos^2 x - sen^2 x = cos\,(2x)$$ 2

Observe-se que a primeira equivalência é válida em todo o domínio de f, já que, em $]0, \frac{\pi}{2}[$, se tem $sen\, x \neq 0$ e $cos\, x \neq 0$. O facto de o examinando não o explicitar não permite concluir que não o tenha tido em conta, pelo que não deverá ser penalizado.

c).. 14

Determinar o zero de f' 7

1.º Processo

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow cos\,(2\,x) = 0$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,x = \frac{\pi}{2}$ (com justificação) 4

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 1

A justificação referida poderá ser do tipo da que se segue:

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, vem $0 < 2x < \pi$ e o único valor, entre 0 e π, para o qual o co-seno é zero, é $\frac{\pi}{2}$.

2.º Processo

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow cos\,(2\,x) = 0 \wedge x \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ 2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 2

3.º Processo

$-\frac{cos\,(2x)}{sen^2\,x\,.\,cos^2\,x} = 0 \underset{(\text{em } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ 4

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 3

Mostrar que $\frac{\pi}{4}$ é o valor de x para o qual f toma o seu valor mínimo 7

Nota 1: o examinando pode mostrar que $\pi/4$ é o valor de x para o qual a função f toma o seu valor mínimo por, pelo menos, dois processos:

1. Através do estudo da variação do sinal de f' (que pode ser apresentado por meio de um quadro).
2. Através do esboço do gráfico da função, o qual pode ser obtido com recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo da que se segue: "Da análise do gráfico, verifica-se que f é decrescente de 0 até um certo ponto, onde f toma o seu valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\pi/2$. Logo, o único valor que anula f' é necessariamente o ponto onde f toma o seu valor mínimo".

Nota 2: o examinando, com recurso à calculadora gráfica, poderá apresentar uma resolução (incompleta) baseada na análise do gráfico da função. Mais precisamente, o examinando poderá:

• verificar que f é decrescente de 0 até um certo ponto, onde f toma o valor mínimo, e depois é crescente desse ponto até $\pi/2$;

• utilizar, por exemplo, a função *zoom* da calculadora para encontrar um valor aproximado do pedido.

Nesta situação, a cotação máxima a atribuir é de 7 pontos e deverá ter em conta a descrição do processo de utilização da calculadora e o grau de precisão do valor apresentado (note-se que $\pi/4 \approx 0{,}7854$).

V.S.F.F.

2.

a) **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Substituir M por $8,6$ 3

$log_{10} E = 17,624$ 1

$E = 10^{17,624}$ 4

$E \approx 4,2 \times 10^{17}$ 2

2.º Processo

Substituir M por $8,6$ e E por $4,2 \times 10^{17}$ 3

Primeiro membro $\approx 17,623$ 4

Segundo membro $= 17,624$ 1

Conclusão 2

b) **12**

$E \approx 21 \times 10^{17}$ (ou $2,1 \times 10^{18}$) 3

Escrever a equação $log_{10}\left(21 \times 10^{17}\right) = 5,24 + 1,44\,M$ 2

Resolver a equação 7

$18,32 = 5,24 + 1,44\,M$ 4

$M \approx 9,1$ 3

3. .... **20**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos diferentes, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de sequências segundo as quais as sete inspecções vão ser feitas.

Número de casos possíveis $= 7!$ 6

Número de casos favoráveis $= 3! \times 4!$ 10

Probabilidade pedida $= \frac{3! \times 4!}{7!}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

2.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de sequências segundo as quais as três primeiras inspecções vão ser feitas.

Número de casos possíveis $= {}^7A_3$ 8

Número de casos favoráveis $= 3!$ 8

Probabilidade pedida $= \frac{3!}{{}^7A_3}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

3.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher três das sete empresas para realizar as três primeiras inspecções.

Número de casos possíveis $= {}^7C_3$ 8

Número de casos favoráveis $= 1$ 8

Probabilidade pedida $= \frac{1}{{}^7C_3}$ 2

Probabilidade pedida $\approx 3\%$ 2

4.

a) 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Verificar que o ponto A pertence ao plano 5
Verificar que o ponto B pertence ao plano 5
Conclusão 2

2.º Processo

Verificar que o ponto A (ou o ponto B) pertence ao plano 5

Mostrar que a recta AB é paralela ao plano 5

$\overrightarrow{AB} = (-5, 3, 1)$ 2

Referir que o vector de coordenadas

$(1, 2, -1)$ é perpendicular ao plano 1

Verificar que o vector de coordenadas

$(1, 2, -1)$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ 2

Conclusão 2

3.º Processo

Escrever uma condição que define a recta AB 3
Escrever o sistema formado por essa condição e pela equação do plano 2
Concluir que o sistema é indeterminado 5
Conclusão 2

b)..12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$C = (0,0,z)$..2

$\overrightarrow{AC} = (-5,0,z)$ 2

$\overrightarrow{BC} = (0,-3,z-1)$ 2

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0$ 3

$C = (0,0,1)$..3

2.º Processo

$C = (0,0,z)$..2

$\overrightarrow{AC} = (-5,0,z)$ 2

$\overrightarrow{BC} = (0,-3,z-1)$ 2

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$ 2

$35 = 25 + z^2 + 9 + (z-1)^2$...1

$C = (0,0,1)$..3

c)..12

Raio da base = $\sqrt{10}$ 3

Área da base = 10π..3

Altura = 5...3

Volume = $\frac{50\pi}{3}$ 3

Nota 1: no enunciado não se pede um valor aproximado do resultado. Subentende-se, assim, que se pretende o valor exacto do volume pedido. No entanto, se o examinando determinar o valor exacto do volume e depois apresentar um valor aproximado, não deverá ser penalizado.

Nota 2: se o examinando trabalhar sempre com valores aproximados, deverá ser penalizado em 2 pontos.