PROVA N.º 135/5 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos **MILITARES**
1998

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

_

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1. O valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^{x}-1}$ é

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]1,4[$, contínua e estritamente crescente.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira, relativamente à equação $f(x)=2$?

(A) Não tem solução. **(B)** Tem exactamente uma solução.
(C) Tem exactamente duas soluções. **(D)** Tem mais de duas soluções.

3. Seja $g : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = ln\,x$.
No gráfico da função g existe um ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual é a abcissa desse ponto?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $ln\,2$

4. Considere a sucessão de termo geral $u_n = sen\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)$
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) (u_n) é crescente **(B)** (u_n) é decrescente
(C) (u_n) é um infinitamente grande **(D)** (u_n) é limitada

5. Considere, num referencial o. n. xOy, uma elipse de focos $F_1\,(-3,0)$ e $F_2\,(3,0)$ e cujo eixo maior tem comprimento 12 . Seja V o ponto da elipse mais afastado de F_1 .
Qual é a distância de F_1 a V ?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9

6. Qual das condições seguintes define, num referencial o. n. $Oxyz$, uma recta paralela ao eixo Oy ?

(A) $x=1 \wedge y=2 \wedge z=3$ **(B)** $x=2 \wedge z=1$
(C) $x=y=z$ **(D)** $y=1$

7. De dois vectores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ sabe-se que têm ambos norma igual a 3 e que $\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{q} = -9$ ($\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{q}$ *designa o produto escalar de* $\overrightarrow{p}$ *por* $\overrightarrow{q}$).
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}$ **(B)** $\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}$
(C) $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q}$ **(D)** O ângulo dos vectores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ é agudo

8. Os números de telefone de uma certa região têm sete algarismos, sendo os três primeiros 123 (por esta ordem).
Quantos números de telefone podem existir nessa região?

(A) 10^7 **(B)** 10^4 **(C)** 7^4 **(D)** ${}^{10}A_4$

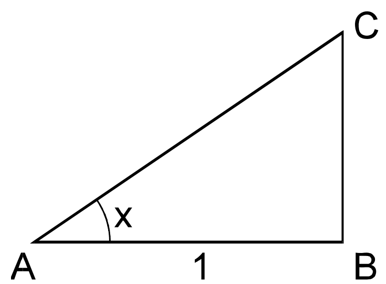
9. Lança-se sucessivas vezes uma moeda portuguesa.
Qual é a probabilidade de serem necessários **pelo menos** três lançamentos, até sair a face escudo?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{16}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Considere um triângulo rectângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$.
Admita que se tem $\overline{AB} = 1$ e que x designa a amplitude do ângulo BAC.



a) Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por

$$f(x) = \frac{1 + sen\,x + cos\,x}{cos\,x} \quad , \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

b) Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.
Determine o valor de $f(\alpha)$.

c) Recorrendo à função derivada de f, mostre que f é crescente.
Interprete geometricamente este resultado.

2. Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre.
Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do pára-quedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6\,t + 25\,e^{-1{,}7\,t}$$

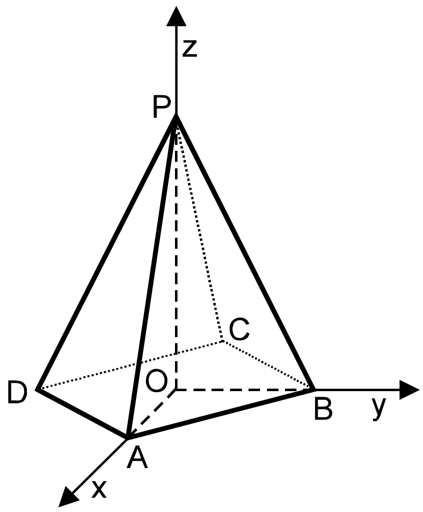
a) Sabendo que, no momento em que o pára-quedista salta do helicóptero, este se encontra a 1500 metros do solo, determine a distância percorrida em queda livre pelo pára-quedista (desde que salta do helicóptero até ao momento da abertura do pára-quedas).

b) Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do pára-quedas, demora o pára-quedista a atingir o solo. Explique como procedeu.

3. Trinta soldados participam num exercício. A Marina Santos é um dos trinta soldados.
É necessário escolher três dos trinta soldados para ficarem de sentinela durante a noite.
Admitindo que a escolha é feita ao acaso, qual é a probabilidade de a Marina Santos ficar de sentinela?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. A figura abaixo representa uma pirâmide quadrangular regular, em referencial o. n. $Oxyz$.

- A base $[ABCD]$ da pirâmide é um quadrado contido no plano xOy
- Os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- Os pontos B e D pertencem ao eixo Oy
- O ponto P pertence ao eixo Oz



a) Sabendo que uma equação do plano ABP é $2x + 2y + z = 6$, determine o volume da pirâmide.

b) Justifique que a recta definida pela condição $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ é perpendicular ao plano ABP e contém a origem do referencial.

c) Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e que é tangente ao plano ABP.
(Sugestão: tenha em conta a alínea anterior.)

Formulário

Volume da Pirâmide $= \frac{1}{3} \times$ *Área da Base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte...**81**

Cada questão certa .... +9
Cada questão errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 40
a) 13
b)..13
c)..14

2 23
a) 10
b)..13

3 20

4 36
a) 12
b)..12
c)..12

TOTAL **200**