EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª Fase**
1999 — **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

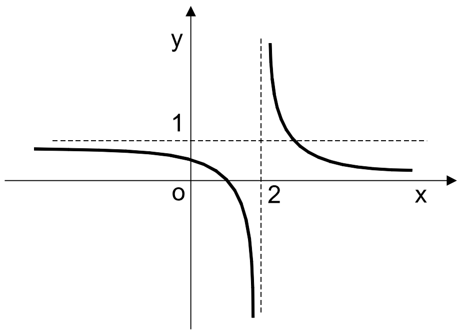
A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

As rectas de equações $x = 2$, $y = 1$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de f.



Seja (x_n) a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

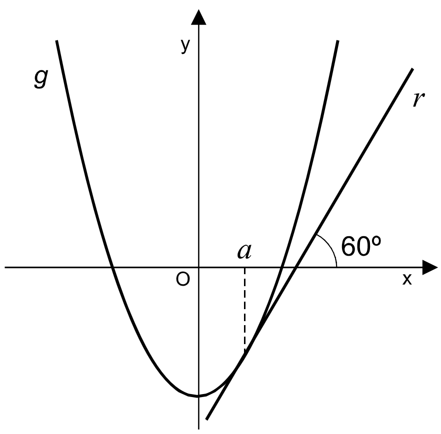
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

2. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \sqrt{3}\, x^2 - 1$$

- uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a



A inclinação da recta r é $60°$

Indique o valor de a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(0) = 0$
- h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$
- h é uma função par

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) h tem um máximo relativo para $x = 0$

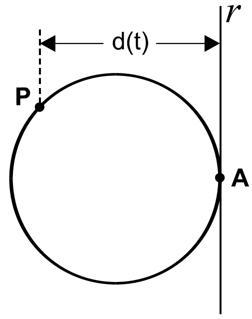
(B) $h(-1) < 0$

(C) h é estritamente decrescente no intervalo $[-1, 0]$

(D) $h(-2) + h(2) = 0$

4. Na figura estão representadas:

- uma circunferência de raio 1
- uma recta r, tangente à circunferência no ponto A

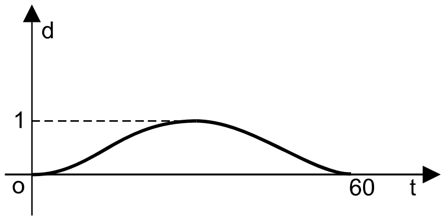


Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

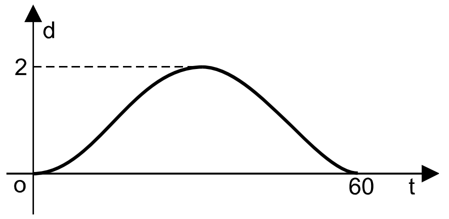
Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r, t segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

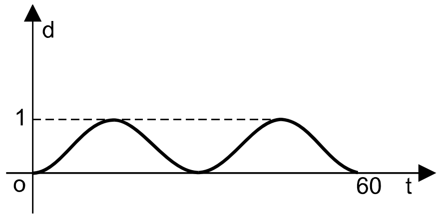
(A)



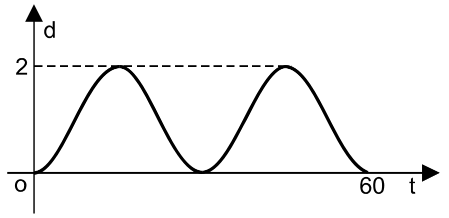
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n. xOy, uma parábola P tem vértice $V(3,6)$ e foco $F(-1,6)$.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação da directriz da parábola P

(A) $x = -5$ **(B)** $x = 1$ **(C)** $x = 3$ **(D)** $x = 7$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β, definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha : x = 1 \quad \text{e} \quad \beta : y = 2$$

Seja r a recta de intersecção dos planos α e β.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vectorial da recta r

(A) $(x,y,z) = (1,2,0) + k\,(0,0,2)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x,y,z) = (1,1,0) + k\,(1,2,0)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y,z) = (1,1,0) + k\,(0,0,2)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y,z) = (1,2,0) + k\,(1,2,0)\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano definido pela equação $x + 2y + 3z = 10$

Para um certo número real m, a condição $x = y - 2 = \frac{z}{m}$ define uma recta paralela ao referido plano.

Indique o valor de m

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

8. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os números saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4}$ **(B)** $\frac{6 \times 5}{6^4}$ **(C)** $\frac{6 \times 5}{6^2}$ **(D)** $\frac{4 \times 3}{6^2}$

9. $\underline{a \ \ b \ \ c \ \ d \ \ e \ \ f \ \ g}$ representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c = {}^6C_3$ **(B)** $c = {}^6C_2$ **(C)** $c = {}^7C_3$ **(D)** $c = {}^7C_2$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\, e^{x+1} & se \;\; x \leq 0 \\ \dfrac{x + \text{sen}\; x}{x} & se \;\; x > 0 \end{cases}$

1.1. Estude a função f quanto à continuidade.

1.2. Mostre que f admite um único máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e determine-o.

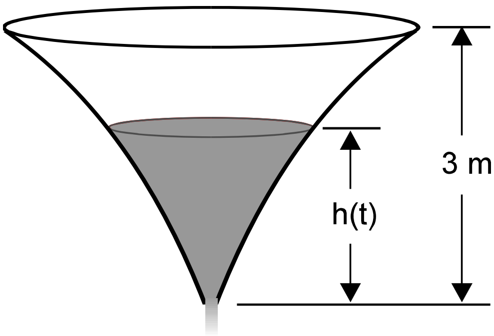
1.3. Seja r a recta de equação $y = 1$.
Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

2. A figura representa um reservatório com três metros de altura.
Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.
O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - b\,t)\,, \quad t \in [0, 14]\,,$$

onde a e b são constantes reais positivas.



2.1. Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$

2.2. Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-\,0{,}2$.
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

3. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sophia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sophia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

3.1. De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

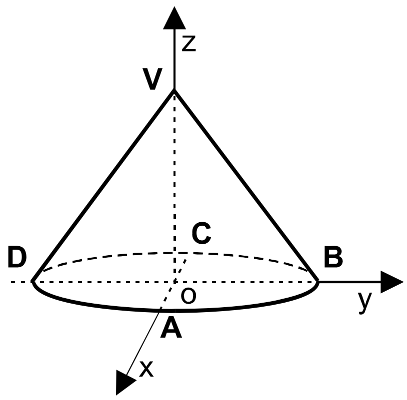
3.2. Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz



4.1. Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x + 4y + 3z = 12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

4.2. Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

4.3. Designando por α a amplitude do ângulo BVD, determine o valor de $\operatorname{sen} \alpha$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 38
- **1.1.** 12
- **1.2.** 15
- **1.3.** 11

2. 25
- **2.1.** 12
- **2.2.** 13

3. 20
- **3.1.** 8
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**