EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte 81

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada .... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1. 38
- **1.1.** 12
- **1.2.** 15
- **1.3.** 11

2. 25
- **2.1.** 12
- **2.2.** 13

3. 20
- **3.1.** 8
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL 200

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	B	D	C	B	D	A	B	D	B
Versão 2	D	B	D	C	B	C	C	A	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. ....**12**

Justificar a continuidade de f em $\mathbb{R}^-$..1

Justificar a continuidade de f em $\mathbb{R}^+$..1

Justificar a não continuidade de f no ponto 0..10

1.º Processo:

Cálculo de $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 2

Cálculo de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **(ver nota)** 6

Conclusão 2

2.º Processo:

Cálculo de $f(0)$ 2

Cálculo de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **(ver nota)** 6

Conclusão 2

Nota:
Os seis pontos atribuídos ao cálculo de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ devem ser desdobrados de acordo com o seguinte critério:

$\frac{x + \text{sen } x}{x} = 1 + \frac{\text{sen } x}{x}$ 2

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ 3

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ 1

V.S.F.F.

1.2. 15

Calcular $f'(x)$ para $x < 0$ 4

$f'(x) = (x^2)' e^{x+1} + x^2 (e^{x+1})'$ 2

$f'(x) = 2x\, e^{x+1} + x^2 e^{x+1}$ 2

Determinar o zero de f' para $x < 0$ 4

$2x\, e^{x+1} + x^2 e^{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x+1}(2x + x^2) = 0$ 1

$\Leftrightarrow x(2 + x) = 0$ 1

Concluir que -2 é o zero de f' para $x < 0$ 2

Verificar que -2 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ **(ver nota)** 5

$f(-2) = 1 + \frac{4}{e}$ 2

Nota:

O examinando pode mostrar que -2 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo em $\mathbb{R}^-$ por, pelo menos, dois processos:

- através do estudo da variação do sinal de f' (em $\mathbb{R}^-$), que pode ser apresentado por meio de um quadro;

- através do esboço do gráfico da função (em $\mathbb{R}^-$), o qual pode ser obtido com recurso à calculadora gráfica. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo:

  «Da análise do gráfico, verifica-se que f é crescente à esquerda de -2 e decrescente à direita desse ponto. Logo, o único valor que anula f' (em $\mathbb{R}^-$) é, necessariamente, o ponto onde f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ (como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

  ou, mais simplesmente,

  «Da análise do gráfico, verifica-se que f tem um máximo para $x = -2$. Logo, é para $x = -2$ que f toma o seu valor máximo, em $\mathbb{R}^-$ (como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

1.3. .... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x > 0$.. 7

$f(x) = 1$

$\Leftrightarrow$ sen $x = 0$.. 3

$\Leftrightarrow x = k\,\pi$, com $k \in \mathbb{N}$ **(ver nota 1)** 4

Concluir a existência de infinitos pontos de intersecção.. 4

Notas:

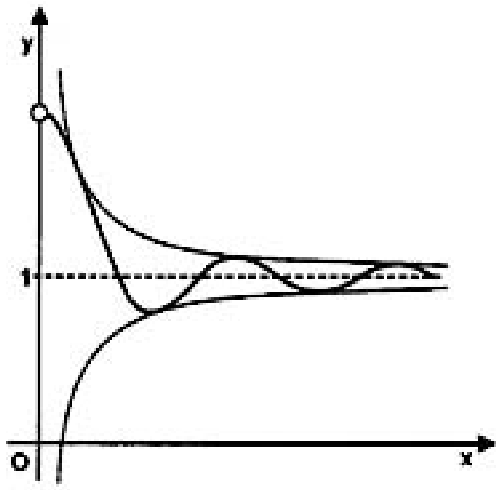
1. O examinando que escreva apenas $x = k\,\pi$, ou que escreva $k \in \mathbb{Z}$, deve ser penalizado em 2 pontos.

2. O examinando pode começar por resolver a equação $f(x) = 1$, em $\mathbb{R}_0^-$.
   Neste caso, a distribuição das cotações deve ser feita como se segue:
   Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x \leq 0$ 2
   Resolver a equação $f(x) = 1$, para $x > 0$..7
   Concluir a existência de infinitos pontos de intersecção..................................2

3. Depois de obter a equação sen $x = 0$, o examinando pode concluir imediatamente: «Esta equação tem infinitas soluções, para $x > 0$» (sem as explicitar). Neste caso, deve ser atribuída ao examinando a totalidade da cotação prevista para esta questão (11 pontos).

2.º Processo

O examinando pode mostrar que a equação $f(x) = 1$ tem infinitas soluções, em $\mathbb{R}^+$, sem a resolver. Para isso, ele poderá utilizar uma argumentação do tipo da que se segue:



«Tem-se $-1 \leq$ sen $x \leq 1$, com os valores -1 e 1 a serem atingidos, alternadamente, infinitas vezes.

Por isso, o gráfico de f, em $\mathbb{R}^+$, está compreendido entre dois ramos de hipérbole, definidos respectivamente por

$g(x) = 1 - \frac{1}{x} \wedge x > 0$ e

$h(x) = 1 + \frac{1}{x} \wedge x > 0$,

intersectando-os, alternadamente, infinitas vezes.

O Teorema de Bolzano garante então que a equação $f(x) = 1$ tem infinitas soluções, em $\mathbb{R}^+$.»

2.1. .... **12**

Estabelecer a condição $\log_2(a - b \times 0) = 3$...3

Estabelecer a condição $\log_2(a - b \times 14) = 0$..3

$a = 8$ 2

$8 - 14b = 1$ 3

$b = \frac{1}{2}$ 1

Nota:

Se o examinando substituir a por 8 e b por $\frac{1}{2}$ na expressão da função h, obtendo $h(t) = \log_2\left(8 - \frac{1}{2}t\right)$, e verificar em seguida que $h(0) = 3$ e que $h(14) = 0$, mostra que o par $\left(8, \frac{1}{2}\right)$ é solução do sistema $\begin{cases} \log_2(a - b \times 0) = 3 \\ \log_2(a - b \times 14) = 0 \end{cases}$ mas não mostra que o par $\left(8, \frac{1}{2}\right)$ é a única solução do referido sistema, pelo que deve ser penalizado em 4 pontos.

2.2. .... **13**

Verificação pedida 8

Escrever $\frac{h(11) - h(6)}{11 - 6}$ 2

Mostrar que $\frac{h(11) - h(6)}{11 - 6} = -0{,}2$ 6

$h(11) - h(6) = \log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2(5)$ 1

$\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2(5) = -1$ **(ver notas 1 e 2)**.......4

Restantes cálculos 1

Interpretação **(ver notas 3 e 4)**.. 5

Notas:

1. Estes 4 pontos devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

   Propriedade do logaritmo do quociente 2

   $\log_2(2) = 1$ ou $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ 2

2. Se o examinando utilizar a calculadora para, através de uma mudança de base, determinar $\log_2\left(\frac{5}{2}\right)$ e $\log_2(5)$, deverá ser penalizado em 1 ponto (note-se que os números em causa são irracionais, pelo que a utilização da calculadora não permite provar a igualdade do enunciado).

   Se, além disso, o examinando não utilizar toda a precisão da calculadora e arredondar os dois valores, deve ser penalizado em mais 1 ponto.

3. Indicam-se a seguir duas formas possíveis de apresentar a interpretação pedida:

   • «A altura da água no reservatório desceu, em média, 0,2 metros por hora, entre os instantes correspondentes a seis e a onze horas após a abertura da válvula.»

   • «No período referido, a altura da água diminuiu a uma velocidade média de 20 centímetros por hora.»

4. Se o examinando referir o caudal médio (ou a velocidade média) com que a água sai do reservatório, em vez da velocidade média de diminuição da altura da água, deverá ser cotado com 0 pontos.

3.1. .... **8**

Número de maneiras de escolher os dois livros de Saramago $= {}^3C_2$ (ou 3) 1

Número de maneiras de escolher o livro de Sophia $= {}^4C_1$ (ou 4) 1

Número de maneiras de escolher os três livros de Sagan $= {}^5C_3$ 1

Número pedido $= {}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^5C_3$ 4

${}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^5C_3 = 120$ 1

3.2. .... **12**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto das permutações dos seis livros.

Número de casos possíveis $= 6\,!$

Número de casos favoráveis $= 5 \times 2\,! \times 4\,!$

2.º Processo

Designemos por A e B os dois livros de José Saramago que a Joana escolheu.

O espaço de acontecimentos é o conjunto dos pares ordenados $(a,\, b)$, onde a designa, na sequência pela qual os seis livros vão ser lidos, o número de ordem de leitura do livro A e b designa, na mesma sequência, o número de ordem de leitura do livro B.

Número de casos possíveis $= {}^{6}A_2$

Número de casos favoráveis $= 5 \times 2\,!$

3.º Processo

O espaço de acontecimentos é constituído pelos conjuntos $\{a,\, b\}$, onde a e b têm o mesmo significado que no 2.º processo.

Número de casos possíveis $= {}^{6}C_2$

Número de casos favoráveis $= 5$

Qualquer que seja o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos, a distribuição das cotações deve ser feita como segue:

Número de casos possíveis 5

Número de casos favoráveis 5

Fracção (Regra de Laplace) 1

Simplificação da fracção 1

Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

   Por exemplo, numa resposta como $\frac{5\times 2\,!\times 4\,!}{6!} = \frac{1}{3}$ está implícita a contagem correcta dos casos possíveis e dos casos favoráveis.

2. Se o examinando considerar o número de casos possíveis de acordo com um dos modelos e o número de casos favoráveis de acordo com outro modelo, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para o conjunto dos dois números.

   Por exemplo, uma resposta como $\frac{5\times 2!}{6!} = \frac{1}{72}$ deve ser cotada com 7 pontos (5+1+1).

3. Se o examinando se **limitar a apresentar um resultado**, como por exemplo $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{6}$, deverá ser cotado com 0 pontos.

4.1. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Mostrar que o comprimento do raio da base do cone é 3 6

O comprimento do raio da base do cone é a ordenada de B 1
B tem coordenadas $(0, b, 0)$ 2
$B \in ABV \Leftrightarrow 4\times 0 + 4\times b + 3\times 0 = 12$ 2
$b = 3$ 1

ou

O comprimento do raio da base do cone é a ordenada de B 1
O ponto B é a intersecção de ABV com o eixo Oy 2
Escrever $4x + 4y + 3z = 12 \ \wedge\ x = 0 \wedge z = 0$ 2
$y = 3$ 1

Mostrar que a altura do cone é 4 6

A altura do cone é a cota de V 1
V tem coordenadas $(0, 0, c)$ 2
$V \in ABV \Leftrightarrow 4\times 0 + 4\times 0 + 3\times c = 12$ 2
$c = 4$ 1

ou

A altura do cone é a cota de V 1
O ponto V é a intersecção de ABV com o eixo Oz 2
Escrever $4x + 4y + 3z = 12 \ \wedge\ x = 0 \wedge y = 0$ 2
$z = 4$ 1

V.S.F.F.

2.º Processo

Comprimento do raio da base do cone igual a 3 é equivalente a dizer que as coordenadas de A e de B são, respectivamente, $(3,0,0)$ e $(0,3,0)$ 2

Altura do cone igual a 4 é equivalente a dizer que as coordenadas de V são $(0,0,4)$ 2

Coordenadas de A, B e V serem $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,4)$, respectivamente, é equivalente, dado que os três pontos são não colineares, a ABV ser definido por $4x+4y+3z=12$ 8

4.2. 12

Escrever as coordenadas do centro da esfera 2

Determinar o raio da esfera ($\overline{VB}$) 5

Escrever a condição $x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$ 5

Nota:

Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $x^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$.

- Escrever " $=$ " ou " $<$ " em vez de " $\leq$ ": penalização de 2 pontos.
- Escrever 5 em vez de 25 : penalização de 3 pontos.
- Escrever $(z+4)^2$ em vez de $(z-4)^2$: penalização de 3 pontos.

4.3. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{VB}$ 1
Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{VD}$ 1
Determinar $\overrightarrow{VB} \,.\, \overrightarrow{VD}$ 2
Determinar $\|\overrightarrow{VB}\|$ 1
Determinar $\|\overrightarrow{VD}\|$ 1
Determinar $\cos\alpha$ 3
Determinar $\operatorname{sen}\alpha$ 3

Nota:

Se o examinando utilizar os vectores $\overrightarrow{BV}$ e $\overrightarrow{DV}$, sem justificar a igualdade $\overrightarrow{BV}\,\hat{}\,\overrightarrow{DV} = \overrightarrow{VB}\,\hat{}\,\overrightarrow{VD}$, deverá ser penalizado em 3 pontos.

2.º Processo

$\alpha = 2\beta$ em que β designa a amplitude do ângulo BVO 1

$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\beta\ \cos\beta$ 5

Determinar sen β 2

Determinar cos β 2

Determinar sen α 2

3.º Processo

$\alpha = \pi - 2\gamma$ em que γ designa a amplitude do ângulo VBO 2

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\gamma)$ 2

$\operatorname{sen}(2\gamma) = 2\operatorname{sen}\gamma\ \cos\gamma$ 2

Determinar sen γ 2

Determinar cos γ 2

Determinar sen α 2

Nota:
Deverá ser atribuída a cotação máxima de 11 pontos a um examinando que recorra à calculadora para determinar sen α, utilizando um processo como o que se exemplifica a seguir:

- determinar uma razão trigonométrica do ângulo BVO;
- determinar a amplitude do ângulo BVO;
- duplicar a amplitude do ângulo BVO;
- determinar o respectivo seno.

A cotação a atribuir depende da clareza da descrição apresentada e deverá ter em conta se o examinando arredondou os valores intermédios ou se utilizou toda a precisão da calculadora.