EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **MILITARES**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Qual é o valor de $\lim f\,(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** e

2. Seja g uma função definida por $g(x) = \operatorname{tg} x$.
Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o domínio de g ?

(A) $\left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$

(C) $]0, \pi[$ **(D)** $]\pi, 2\pi[$

3. Considere uma função h de domínio $\mathbb{R}^+$.

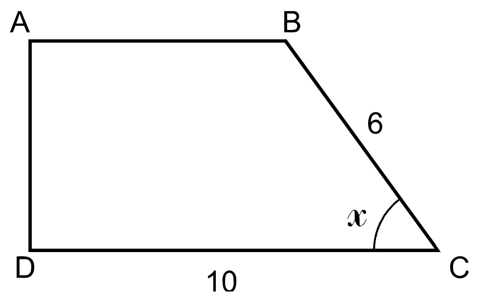
A recta de equação $y = -2$ é assimptota do gráfico de h **.**

Seja h' a função derivada de h.

Indique qual dos seguintes pode ser o valor de $\lim_{x \to +\infty} h'(x)$

(A) 0 **(B)** -2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. A figura representa um trapézio rectângulo $[ABCD]$.
Tem-se que $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CD} = 10$.



Seja $x \in \left]0, \pi\right[$ a amplitude do ângulo BCD e seja $f(x) = \overline{AB}$ (f é, portanto, a função que, a cada x, associa o comprimento da base $[AB]$ do trapézio, quando a amplitude do ângulo BCD é x).

Qual das afirmações seguintes sobre a função f é verdadeira?

(A) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ **(B)** $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$

(C) $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$ **(D)** $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$

5. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, as superfícies esféricas de equações

$x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9$

A intersecção das duas superfícies esféricas é

(A) um ponto. **(B)** uma circunferência.
(C) uma superfície esférica. **(D)** o conjunto vazio.

6. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, dois planos concorrentes, de equações

$x - y + 3z = 1$ e $x + y - 7z = 7$

Seja r a recta de intersecção dos dois planos.

Qual dos pontos seguintes pertence à recta r ?

(A) $(5,5,0)$ **(B)** $(1,0,0)$ **(C)** $(0,0,-1)$ **(D)** $(4,3,0)$

7. Considere, num referencial o. n. xOy, a elipse tal que:

- os seus focos são os pontos $(-3,0)$ e $(3,0)$
- um dos pontos de intersecção da elipse com o eixo Oy é o ponto $(0,4)$

Qual das condições seguintes é uma equação desta elipse?

(A) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **(B)** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(C) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **(D)** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

8. Sete amigos vão ao futebol ver um desafio entre o clube Alfa e o clube Beta.
Três deles são adeptos do clube Alfa e quatro são adeptos do clube Beta.
No estádio sentam-se na mesma fila, uns ao lado dos outros, distribuidos ao acaso.
Qual é a probabilidade de os adeptos do clube Alfa ficarem todos juntos e os adeptos do clube Beta ficarem também todos juntos ?

(A) $\dfrac{3! \times 4!}{7!}$ **(B)** $\dfrac{2 \times 3! \times 4!}{7!}$

(C) $\dfrac{2}{3! \times 4!}$ **(D)** $\dfrac{1}{3! \times 4!}$

9. Um dos termos do desenvolvimento de $(\pi + e)^n$ é $120\,\pi^7 e^3$
Indique o valor de n.

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 20 **(D)** 21

Segunda Parte

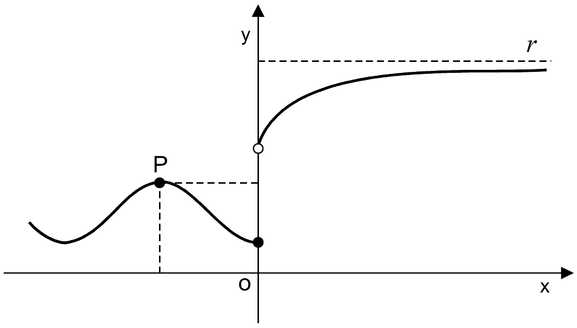
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, definida por $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{7x+4}{x+1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

Na figura junta estão representados:

- parte do gráfico de f
- a recta r, assimptota do gráfico de f
- o ponto P, cuja abcissa é o maior dos maximizantes da restrição de f a $\mathbb{R}_\circ^-$



1.1. Determine as coordenadas do ponto P.

1.2. Determine o contradomínio da função f.

2. Um pára-quedista salta de um avião. Ao fim de cinco segundos, o pára-quedas abre.
Um minuto depois de ter saltado, o pára-quedista atinge o solo.

Admita que a velocidade do pára-quedista, medida em metros por segundo, t segundos após ele ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de k, por

$$v(t) = \begin{cases} 55\left(1 - e^{kt}\right) & \text{se } t < 5 \\ 6 + 27\, e^{-1{,}7\,(t-5)} & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

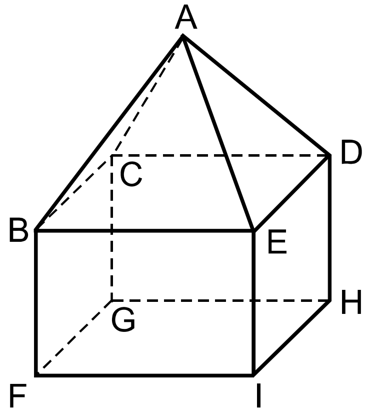
2.1. Sabendo que a função v é contínua, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às milésimas).

2.2. Estude a função quanto à monotonia, para $t \geq 5$. Interprete a conclusão a que chegou.

2.3. Comente a seguinte afirmação: *Após a abertura do pára-quedas, a velocidade tem uma variação acentuada nos primeiros quatro segundos, após os quais estabiliza, permanecendo praticamente constante até à chegada ao solo*.

V.S.F.F.

3. Na figura está representado o sólido $[ABCDEFGHI]$



Dispomos de cinco cores (*amarelo, branco, castanho, preto* e *vermelho*) para colorir as suas nove faces.
Cada face é colorida por uma única cor.

3.1. De quantas maneiras diferentes podemos colorir o sólido, supondo que as quatro faces triangulares só podem ser coloridas de *amarelo*, de *branco* ou de *castanho*, e que as cinco faces rectangulares só podem ser coloridas de *preto* ou de *vermelho*?

3.2. Admita agora que o sólido vai ser colorido ao acaso, podendo qualquer cor colorir qualquer face.
Determine a probabilidade de exactamente cinco faces ficarem coloridas de branco e as restantes faces com cores todas distintas.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, os pontos $A(2,3,10)$ e $B(10,13,25)$.
Um tiro é disparado de A, de tal forma que o projéctil passa pelo ponto B.

4.1. Pretende-se atingir um alvo situado no ponto $C(98,123,190)$.
Mostre que, se o projéctil seguir uma trajectória rectilínea, o alvo é atingido.

4.2. A trajectória rectilínea só é garantida se o alvo se encontrar a menos de 300 unidades do local onde o projéctil é disparado.
Prove que, no caso presente, a trajectória rectilínea está garantida.

4.3. Justifique que existe um e um só plano α que contém a origem do referencial e os pontos A, B e C.
Averigúe se esse plano é perpendicular ao plano xOy.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 22
  1.1. 10
  1.2. 12

2. 39
  2.1. 12
  2.2. 15
  2.3. 12

3. 22
  3.1. 11
  3.2. 11

4. 36
  4.1. 12
  4.2. 12
  4.3. 12

TOTAL **200**