EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada .... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 39
- **1.1.** 11
- **1.2.** 14
- **1.3.** 14

2. 22
- **2.1.** 10
- **2.2.** 12

3. 58
- **3.1.** 22
  - **3.1.1.** 7
  - **3.1.2.** 15
- **3.2.** 36
  - **3.2.1.** 12
  - **3.2.2.** 12
  - **3.2.3.** 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Versão 1	D	A	D	B	C	A	D	B	B
Versão 2	C	D	B	D	D	A	A	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **11**

Verificar que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ 4

$f'(x) =$

$= e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1)$ 3

$= e^x(x^2 + 3x + 1)$ 1

$f'(0) = 1$ 2

$f\ (0) = 0$ 2

Escrever uma equação da recta pedida 3

1.2. .... **14**

Determinar $f''(x)$ 3

$f''(x) =$

$= e^x(x^2 + 3x + 1) + e^x(2x + 3)$ 2

$= e^x(x^2 + 5x + 4)$ 1

Determinar os zeros de f'' 3

$e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ 1

$\Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = -1$ 2

Estudar o sinal de f'' 4

Concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -4]$ e em $[-1, +\infty[$ e voltada para baixo em $[-4, -1]$ (ver **nota**)... 3

Concluir que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão 1

Nota:
Se o examinando apresentar os intervalos abertos, não deverá ser penalizado.

1.3. .... **14**

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R}$, não existem assimptotas verticais do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 1)** 4

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 2)** 6

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(x^2 + x) =$ **(ver nota 3)**

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{e^{-x}}$ 2

$= 0$ 4

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow -\infty$ 1

Notas:

1. O examinando pode determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \longrightarrow +\infty$

2. O examinando pode:

- começar por determinar $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- concluir que $m = 0$
- determinar, em seguida, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Se o examinando optar por este processo, os 6 pontos previstos para o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 3

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 3

A distribuição de cada um destes três pontos é idêntica à distribuição dos seis pontos, indicada acima para o cálculo de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, com a diferença de que, em vez de ser 2 + 4, deverá ser 1 + 2.

3. O examinando pode indicar (ou não) que se está perante a indeterminação $0 \times \infty$. Se não o fizer, não deverá ser penalizado. Se o fizer, e não prosseguir o cálculo, ou prosseguir incorrectamente, deverá receber 1 ponto por essa indicação.

2.1. .... **10**

$n = 84$ 2
$f(84) \approx 12{,}336$ 2
Concluir que o pôr do Sol ocorreu às $18\,h\ \ 50\,m$ 6

$12{,}336\,h \approx 12\,h\ \ 20\,m$ 3
$6\,h\ \ 30\,m + 12\,h\ \ 20\,m = 18\,h\ \ 50\,m$ 3

ou

$6{,}5 + 12{,}336 = 18{,}836$ 3
$18{,}836\,h \approx 18\,h\ \ 50\,m$ 3

2.2. .... **12**

Traduzir o problema por uma equação: $f(n) = 12{,}2$ 2

Resolver a equação 9

$12{,}2 + 2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi\,(n-81)}{183} = 12{,}2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi\,(n-81)}{183} = 0 \Leftrightarrow$ 2

$\Leftrightarrow \frac{\pi\,(n-81)}{183} = k\,\pi \quad (k$ inteiro$) \Leftrightarrow$ 2

$\Leftrightarrow n = 81 + 183\,k$ 2

$\Leftrightarrow n = 81 \lor n = 264$ 3

Conclusão (número pedido $= 2$) 1

V.S.F.F.

3.1.1. .... **7**

Número pedido $= 10\,!$ 6

Número pedido $= 3\,628\,800$ 1

3.1.2. .... **15**

Número pedido $= {}^4A_2 \times {}^6A_4 \times 4\,!$ **(ver nota)** 14

Número pedido $= 103\,680$ 1

Nota:
Indicam-se a seguir possíveis respostas **incorrectas** do examinando, com a respectiva cotação a atribuir. Caberá ao corrector fazer as extrapolações necessárias para outras situações.

${}^4A_2 \times {}^6A_4$ 10
${}^4C_2 \times {}^6C_4 \times 4\,!$ 8
${}^4C_2 \times {}^6C_4$ 4

3.2.1. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
$\overline{PQ} = 6$ 2
Raio da superfície esférica $= 3$ 2
Coordenadas do centro da superfície esférica: $(1,1,1)$ 2
Coordenadas do ponto F: $(0,2,2)$ 2
Distância do ponto F ao centro da superfície esférica $= \sqrt{3}$ 2
Justificação pedida 2

2.º Processo:
$\overline{PQ} = 6$ 2
Raio da superfície esférica $= 3$ 2
Coordenadas do centro da superfície esférica: $(1,1,1)$ 2
Equação que define a superfície esférica:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 2
Coordenadas do ponto F: $(0,2,2)$ 2
Verificação de que $(0,2,2)$ não satisfaz a
equação que define a superfície esférica.. 2

3.2.2. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Referir que a recta EG é perpendicular à recta DF 4

Referir que a recta EG é perpendicular à recta PQ 4

Conclusão (A recta EG é perpendicular a duas rectas concorrentes contidas no plano ADQ, pelo que a recta EG é perpendicular a este plano.) 4

2.º Processo:

$\overrightarrow{EG} = (-2, -2, 0)$ 2

$\overrightarrow{AD} = (0, 0, 2)$ 2

$\overrightarrow{DQ} = (-1, 1, 2)$ 2

$\overrightarrow{EG} . \overrightarrow{AD} = 0$ 2

$\overrightarrow{EG} . \overrightarrow{DQ} = 0$ 2

Conclusão 2

3.2.3. .... **12**

Evidência de que o examinando compreendeu que a secção definida no poliedro pelo plano ADQ é o polígono $[ADQFCP]$ 3

Área do rectângulo $[ADFC]$ 3

Área do triângulo $[DQF]$ 3

Área da secção 3

V.S.F.F.