EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

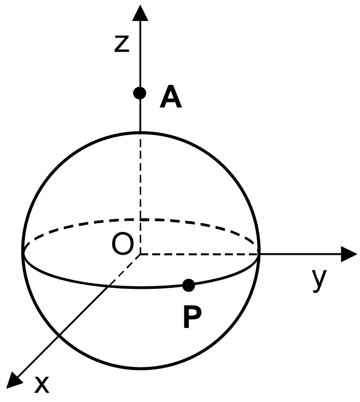
2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0,0,4)$
- a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

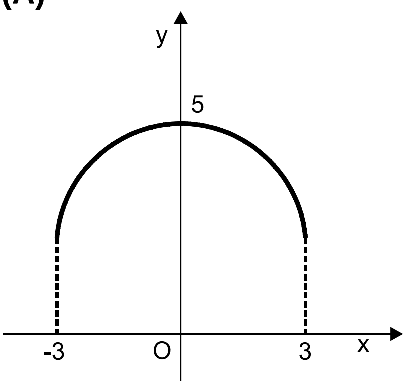
Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.



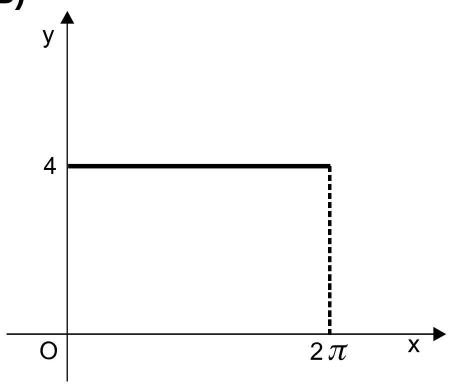
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

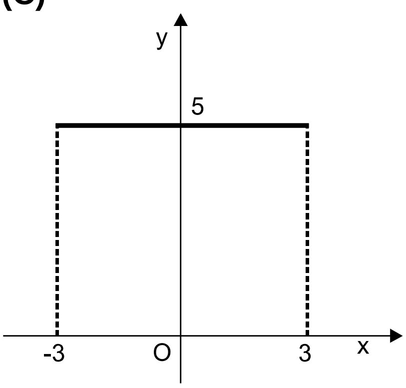
(A)



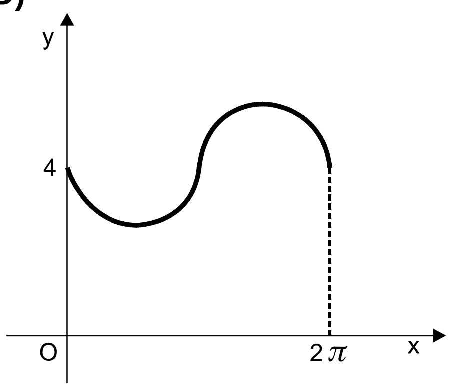
(B)



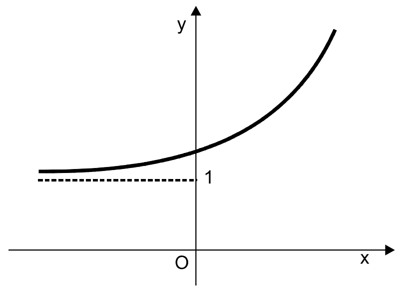
(C)



(D)

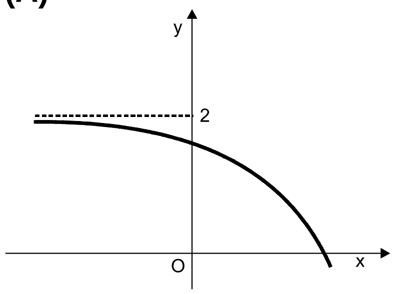


4. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

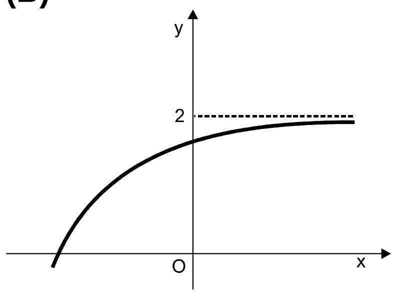


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

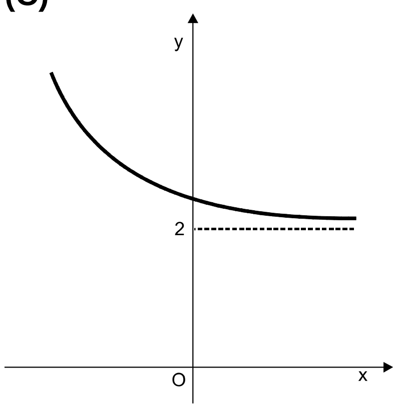
(A)



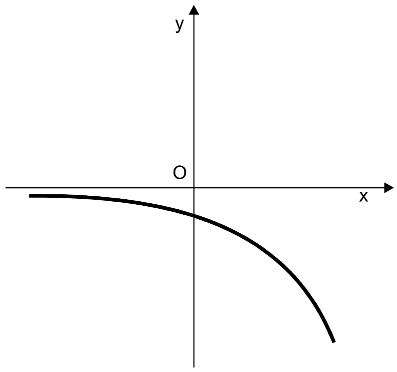
(B)



(C)



(D)



5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse cujo eixo maior está contido no eixo Ox.

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

(B) $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

(C) $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

(D) $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$ e $R(0,0,1)$.
Qual das condições seguintes define uma recta perpendicular ao plano PQR?

(A) $x = 1 \ \wedge \ y = 1 \ \wedge \ z = 1$
(B) $x = 1 \ \wedge \ y = 1$
(C) $x - 1 = y - 2 = z - 3$
(D) $x + y + z = 1$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25 \quad \wedge \quad x = y$

define

(A) uma circunferência
(B) um ponto
(C) um segmento de recta
(D) o conjunto vazio

8. Um frigorífico tem cinco prateleiras.
Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.
De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$ **(B)** ${}^5A_3$ **(C)** 5^3 **(D)** 3^5

9. No Triângulo de Pascal, existe uma linha com onze elementos.
Seja a o maior número dessa linha.
Qual é o valor de a?

(A) ${}^{10}C_5$ **(B)** ${}^{10}C_6$ **(C)** ${}^{11}C_5$ **(D)** ${}^{11}C_6$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\,x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

1.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

1.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{3\,x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\,,\,1000\,\pi]$, os gráficos de g e de h se intersectam em 1001 pontos.

1.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor **abcissa positiva**. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

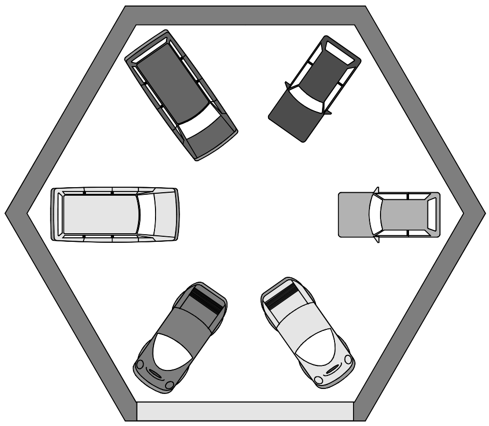
2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.
Num certo dia, este stand tem para exibição seis automóveis diferentes, de **três tipos** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais).

3.1. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar os seis automóveis, de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

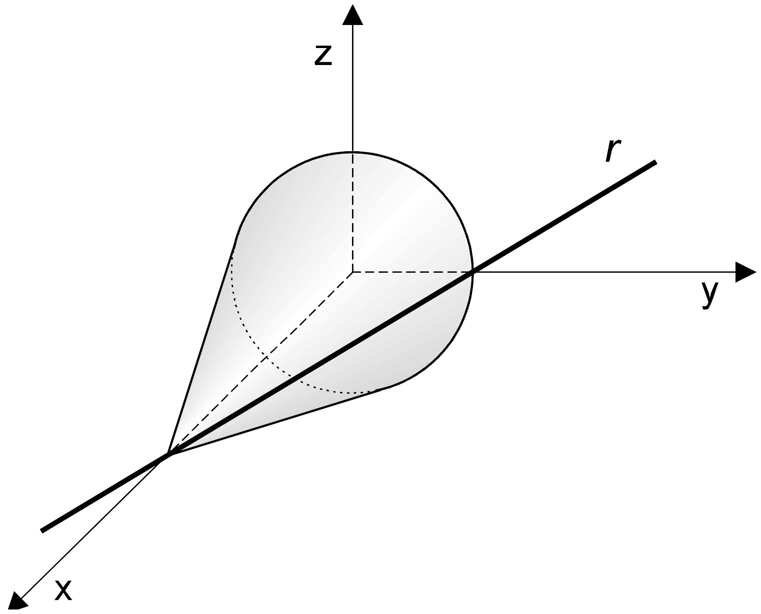
Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Montra

3.2. O gerente do stand pretende oferecer dois automóveis a uma instituição.
Supondo que os dois automóveis vão ser escolhidos ao acaso, de entre os seis automóveis em exibição, qual é a probabilidade de os dois automóveis seleccionados serem de **tipos diferentes**? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.
A base tem raio 3 e centro em O, origem do referencial.
A recta r, de equação $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k\,(3, -1, 0),\ k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.



4.1. Mostre que a altura do cone é 9.

4.2. Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à recta r.

4.3. Determine a área do polígono que resulta da intersecção do cone com o plano de equação $z = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte	**81**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte	**119**
1.	36
1.1.	24
1.1.1.	11
1.1.2.	13
1.2.	12
2.	25
2.1.	11
2.2.	14
3.	22
3.1.	11
3.2.	11
4.	36
4.1.	12
4.2.	12
4.3.	12
TOTAL	**200**